

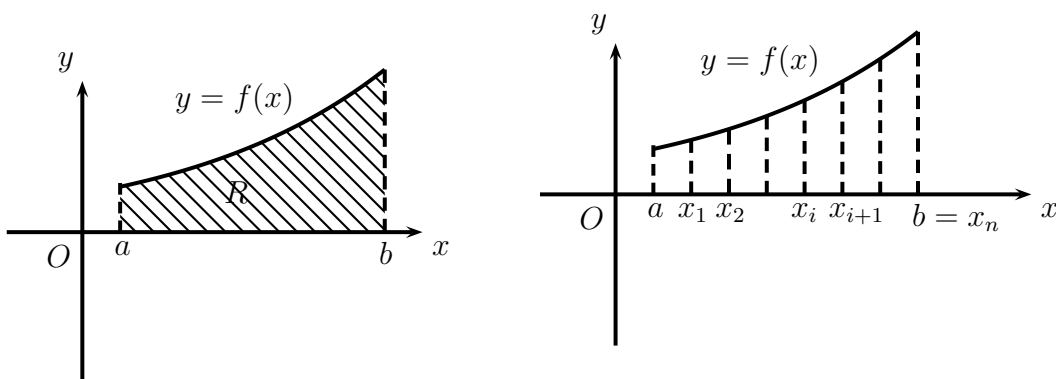
# Chapter 1

## Aplicações da Integral Simples

### 1.1 Área de regiões planares

Seja  $R$  a região limitada pelo gráfico da função  $y = f(x)$ , as retas  $x = a$ ,  $x = b$  e o eixo  $x$ , sendo  $f(x) \geq 0$  para todo  $[a, b]$ . A **área** da região  $R$  é dado pela fórmula:

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$



#### DEMONSTRAÇÃO

Tomemos números  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$  tais que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  e,  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  tais que  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ . Então

$$A \cong \underbrace{(x_1 - x_0)}_{\Delta x_1} f(x_1^*) + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\Delta x_2} f(x_2^*) + \dots + \underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{\Delta x_n} f(x_n^*) = \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(x_i^*)$$

$$\therefore A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(x_i^*) = \int_a^b f(x) dx$$

Resumindo:

- Seja  $R$  a região delimitada pela curva  $y = f(x)$ ,  $f$  contínua em  $[a, b]$ , pelas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , e eixo  $x$ , então a área  $A$  de  $R$  é dado por

$$A = \int_a^b |f(x)| dx.$$

- Em particular se  $R$  é a região delimitada pela curva  $y = f(x)$ , pelas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , e eixo  $x$ , tais que  $f$  contínua em  $[a, b]$ ,  $f(x) \leq 0$  para  $a < x < c$  e  $f(x) \geq 0$  para  $c < x < b$  então a área  $A$  de  $R$  é dado por

$$A = \int_a^b |f(x)| dx = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

- Seja  $R$  a região delimitada pela curva  $x = g(y)$ ,  $g$  contínua em  $[c, d]$ , pelas retas horizontais  $y = c$  e  $y = d$ , e eixo  $y$ , então a área  $A$  de  $R$  é dado por

$$A = \int_c^d |g(y)| dy.$$

- Seja  $R$  a região delimitada pelas curvas  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  interceptando nos pontos com abscissas  $x = a$  e  $x = b$ , então a área  $A$  de  $R$  é dado por

$$A = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

- Seja  $R$  a região delimitada pelas curvas  $x = g_1(y)$ ,  $x = g_2(y)$  interceptando nos pontos com ordenadas  $y = c$  e  $y = d$ , então a área  $A$  de  $R$  é dado por

$$A = \int_c^d |g_1(y) - g_2(y)| dy.$$

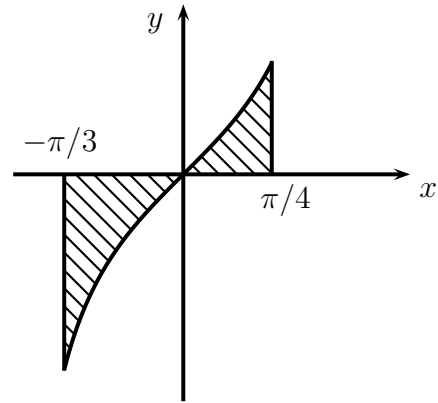
**Exemplo 1.1.** Calcular a área da figura do plano limitada pela curva  $y = \operatorname{tg} x$  e o eixo  $x$  e tal que  $-\pi/3 \leq x \leq \pi/4$ .

**Solução**

$$A = \int_{-\pi/3}^{\pi/4} |\operatorname{tg}(x)| dx = - \int_{-\pi/3}^0 \operatorname{tg}(x) dx + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}(x) dx$$

$$A = [-\ln(\cos x)]_{-\pi/3}^0 + [-\ln(\cos x)]_0^{\pi/4}$$

$$A = \frac{3}{2} \ln(2).$$



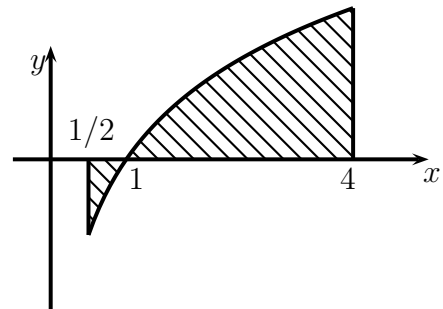
**Exemplo 1.2.** Calcular a área da figura do plano limitada pela curva  $y = \log_2(x)$  e o eixo  $x$  e tal que  $1/2 \leq x \leq 4$ .

**Solução**

$$A = \int_{1/2}^4 |\log_2(x)| dx = - \int_{1/2}^1 \log_2(x) dx + \int_1^4 \log_2(x) dx$$

Usando integração por partes

$$A = \frac{15 \ln(2) - 5}{2 \ln(2)}.$$



Exemplo 1.3. Calcular a área da figura do plano limitada pelas curvas

$f(x) = 2x^2 + 10$  e  $g(x) = 4x + 16$  de modo que  $-2 \leq x \leq 5$ .

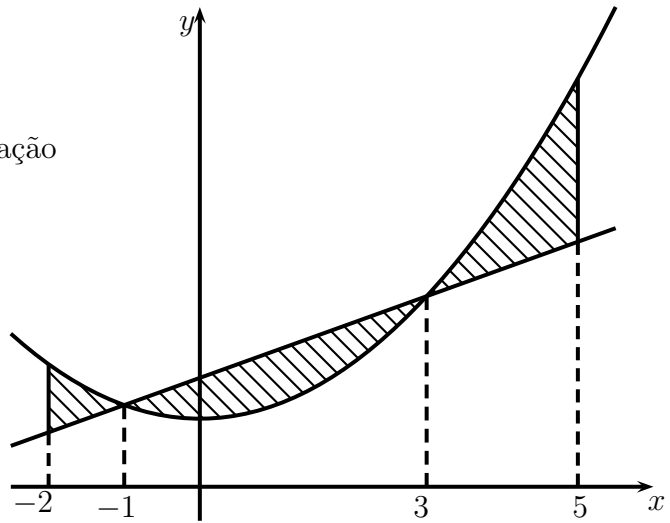
Solução

Para determinar os limites de integração fazemos a interseção das curvas:

$$y = 2x^2 + 10 \text{ e } y = 4x + 16$$

⇓

$$2x^2 + 10 = 4x + 16 \Rightarrow x = -1, 3.$$



$$A = \int_{-2}^{-1} [(2x^2+10)-(4x-16)]dx + \int_{-1}^3 [(4x+16)-(2x^2+10)]dx + \int_3^5 [(2x^2+10)-(4x+16)]dx$$

$$A = \frac{142}{3}.$$

**1.1 Observação.** Se  $f$  e  $g$  são funções contínuas em  $\mathbb{R}$ , para calcular a área da região entre as curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  necessitamos apenas conhecer os pontos de interseção entre as curvas e o sinal de  $f(x) - g(x)$ . Não há necessidade de mais detalhes sobre o gráfico de  $f$  ou de  $g$ .

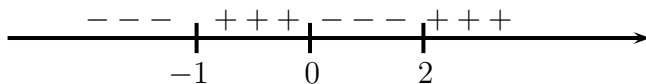
Exemplo 1.4. Calcular a área da figura do plano limitada pelas curvas

$$y_1 = x^5 - x^3 + 2x^2 - x + 3 \text{ e } y_2 = x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 3.$$

Solução

Interseções:  $y_1 = y_2 \Rightarrow x^5 - x^4 - 2x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x^3(x + 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$  ou  $x = -1$  ou  $x = 2$ .

Sinal de  $y_1 - y_2 = x^3(x + 1)(x - 2)$  :



Logo,

$$A = \int_{-1}^0 (y_1 - y_2) dx - \int_0^2 (y_1 - y_2) dx = \int_{-1}^0 (x^5 - x^4 - 2x^3) dx - \int_0^2 (x^5 - x^4 - 2x^3) dx = \frac{116}{30}.$$

**Exemplo 1.5.** Calcular a área da figura do plano limitada pelas curvas  $y^2 + y - 1 - x = 0$  e  $y - x = 0$ .

**Solução**

Neste exemplo convém tomar  $y$  como variável independente e as funções

$$x = f(y) = y^2 + y - 1 \text{ e } x = g(y) = y$$

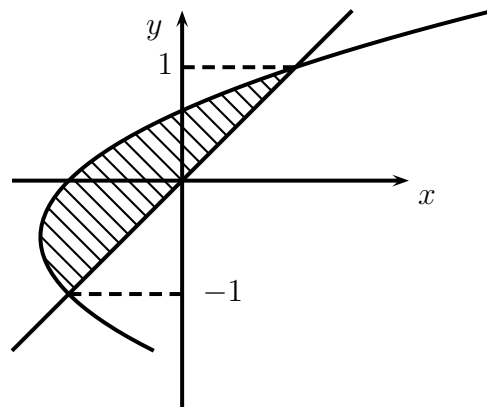
As interseções da parábola e da reta

$$x = y^2 + y - 1 \text{ e } x = y$$

são os pontos  $(-1, -1)$  e  $(1, 1)$ .

$$A = \int_{-1}^1 |y - (y^2 + y - 1)| dy = \int_{-1}^1 (-y^2 + 1) dy$$

$$A = \frac{4}{3}.$$



---

**1.2 Exercícios**

[1] Determine a área da região do plano limitada simultaneamente pelas seguintes curvas:

(1.1)  $y = \ln x$ ,  $x = 2$  e o eixo  $Ox$       (1.2)  $x = 8 + 2y - y^2$ ,  $y = 1$ ,  $y = 3$  e  $x = 0$

(1.3)  $xy = 4$  e  $x + y = 5$       (1.4)  $y = 2^x$ ,  $y = 2x - x^2$ ,  $x = 0$  e  $x = 2$

(1.5)  $y = 2x$ ,  $y = 1$  e  $y = \frac{2}{x}$       (1.6)  $y = |x^2 - 4|$  e  $y = 2$

(1.7)  $y = x^3 - 3x$  e  $y = 2x^2$       (1.8)  $y = \frac{9}{x}$ ,  $y = 9x$  e  $y = x$

(1.9)  $f(x) = x|x|$  e  $g(x) = x^3$       (1.10)  $x = y^2 - 2$  e  $x = 6 - y^2$

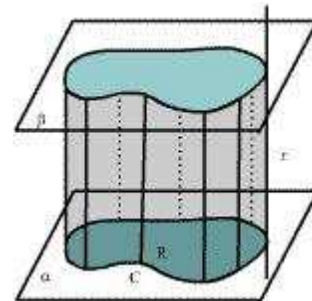
### 1.3 Volume de sólidos

#### Introdução

#### Volume de um cilindro reto

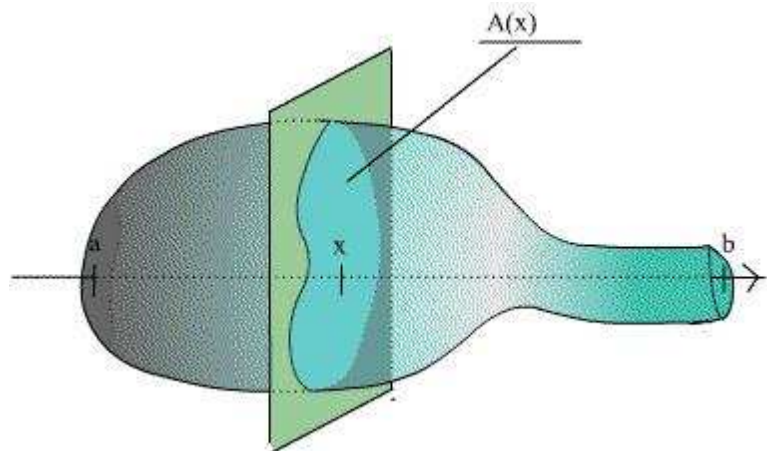
Admitiremos inicialmente a definição de volume para cilindros retos:

Tomemos um plano  $\alpha$  e uma região  $R$  deste plano, com área  $A$  limitada por uma curva fechada  $C$ . Consideremos uma reta  $r$  perpendicular ao plano  $\alpha$  e tomemos a superfície cilíndrica tal que  $C$  seja sua diretriz e  $r$  uma geratriz (isto é, obtida pela reunião de todas as retas paralelas a  $r$  passando por algum ponto de  $C$ ).



Consideremos um plano,  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ . A região do espaço limitada pela superfície cilíndrica e pelos dois planos é um cilindro de base  $R$  e altura  $h$ , sendo  $h$  a distância entre os dois planos. O volume do cilindro é,  $V = A.h$ .

Dado um sólido, tomemos um eixo orientado  $OX$  e, para todo número real  $x$ , o plano perpendicular a  $OX$  em  $x$  (isto é passando pelo ponto de abscissa  $x$  do eixo). Suponhamos que:



- Para todo  $x \in R$ , o plano em  $x$  intercepta o sólido se, e somente, se  $x \in [a, b]$ .
- Se  $x \in [a, b]$  a intersecção é uma região desse plano com área que indicaremos por  $A(x)$ .

Se a função  $A(x)$ , definida em  $[a, b]$ , é contínua então o volume do sólido é:

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

**Dedução da fórmula:**

Tomemos números  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$  tais que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  e números  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tais que  $a_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

O cilindro cuja base é a intersecção do plano perpendicular ao eixo  $OX$  em  $a_i$  com o sólido e cuja altura é  $(x_i - x_{i-1})$  tem volume igual a  $A(a_i)(x_i - x_{i-1})$  e então

$$V \cong \underbrace{(x_1 - x_0)}_{\Delta x_1} A(a_1) + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\Delta x_2} A(a_2) + \dots + \underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{\Delta x_n} A(a_n) = \sum_{i=1}^n \Delta x_i A(a_i)$$

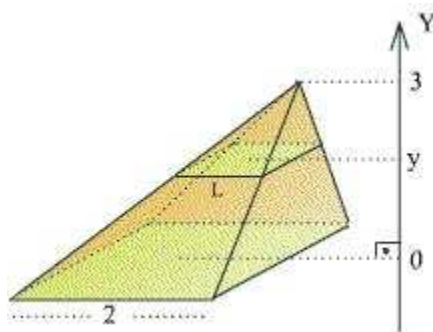
$$\therefore V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i A(a_i) = \int_a^b A(x) dx$$

Chamaremos as intersecções do sólido com os planos perpendiculares ao eixo de **seções planas do sólido transversais ao eixo  $OX$  ou de seções planas.**

**Exemplo 1.6.** *Calcular o volume de uma pirâmide cuja base é um quadrado de lado 2 e cuja altura é 3.*

**Solução**

Tomemos o eixo  $OY$  perpendicular ao plano da base da pirâmide, ortogonal a um dos lados da base e sua origem e orientação como indicados na figura ao lado.

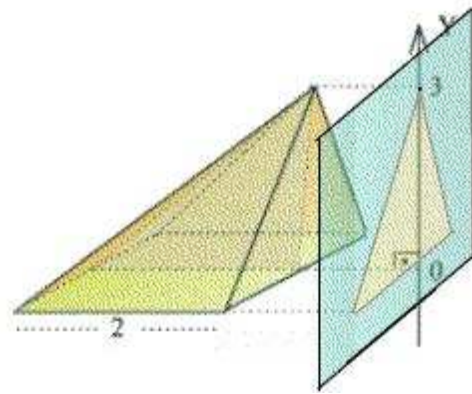


Para todo  $y \in [0, 3]$  a seção plana transversal a  $OY$  é um quadrado cujo lado varia com  $y$  e que indicaremos por  $L$ . Então a seção plana tem área  $A = L^2$  e o volume da pirâmide é dado por  $V = \int_0^3 L^2 dy$ .



Para relacionarmos  $L$  e  $y$ , tomemos:

- Um plano perpendicular ao plano da base, paralelo a um dos lados dessa base e contendo o eixo.
- A projeção da pirâmide neste plano (veja figura ao lado).

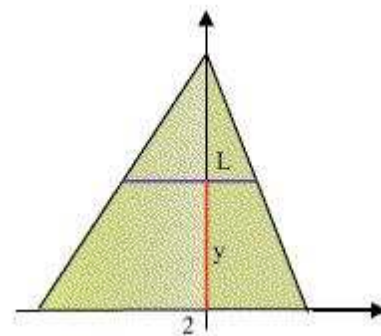


Usando semelhança de triângulos temos

$$\frac{3 - y}{L} = \frac{3}{2} \Rightarrow L = \frac{6 - 2y}{3}$$

Logo,

$$V = \int_0^3 \left(\frac{6 - 2y}{3}\right)^2 dy = \frac{1}{9} \int_0^3 (36 - 24y + 4y^2) dy = 4$$



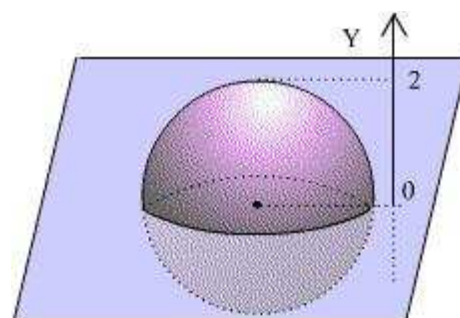
Vemos aqui uma confirmação da proposição apresentada no Ensino Médio:

O volume da pirâmide de base  $A$  e altura  $h$  é  $V = \frac{Ah}{3}$ .

Exemplo 1.7. Calcular o volume de uma esfera de raio igual a 2.

### Solução

Podemos escolher um eixo  $OY$  qualquer. Como indicado na figura ao lado, escolhemos um eixo tal que o plano perpendicular a ele na origem passa pelo centro da esfera.



Para todo  $y \in [-2, 2]$  a seção plana transversal a  $OY$  é um círculo cujo raio varia com  $y$  e que indicaremos por  $r$ . Então a seção plana tem área  $A = \pi r^2$  e o volume da esfera é dado por

$$V = \pi \int_{-2}^2 r^2 dy$$

Ou usando a simetria da esfera

$$V = 2\pi \int_0^2 r^2 dy$$

Para relacionarmos  $r$  e  $y$ , tomemos a intersecção da esfera com um plano que contenha o eixo e passe pelo seu centro.

Pelo Teorema de Pitágoras (veja figura ao lado),

$$r^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{4 - y^2}$$

Logo,

$$V = 2\pi \int_0^2 (\sqrt{4 - y^2})^2 dy = 2\pi \int_0^2 (4 - y^2) dy = \frac{32\pi}{3}.$$

Vemos aqui uma confirmação de outra proposição apresentada no Ensino Médio:

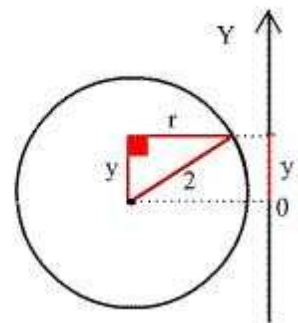
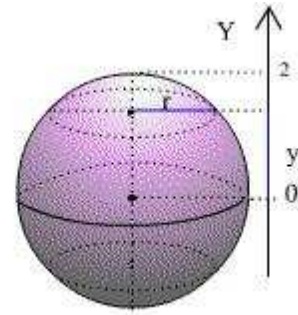
O volume da esfera de raio  $R$  é:  $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ .

**Exemplo 1.8.** Represente graficamente e calcule o volume do sólido limitado pelo plano  $z = 1$  e a superfície de equação  $z = x^2 + y^2$ .

**Solução**

Representação gráfica:

Dado um plano de equação  $z = c$ ,  $c$  constante, (isto é perpendicular a  $OZ$ ), para obtermos sua intersecção com a superfície, substituímos  $z = c$  na equação  $z = x^2 + y^2$ , obtendo,



Logo, a intersecção é

- Se  $c > 0$ , um círculo no plano  $z = c$  de equação  $x^2 + y^2 = c$ . Portanto com raio  $\sqrt{c}$ .
- Se  $c = 0$ , o ponto  $(0, 0)$
- Se  $c < 0$ , vazia

Logo trata-se de uma superfície de revolução em torno de  $OZ$ .

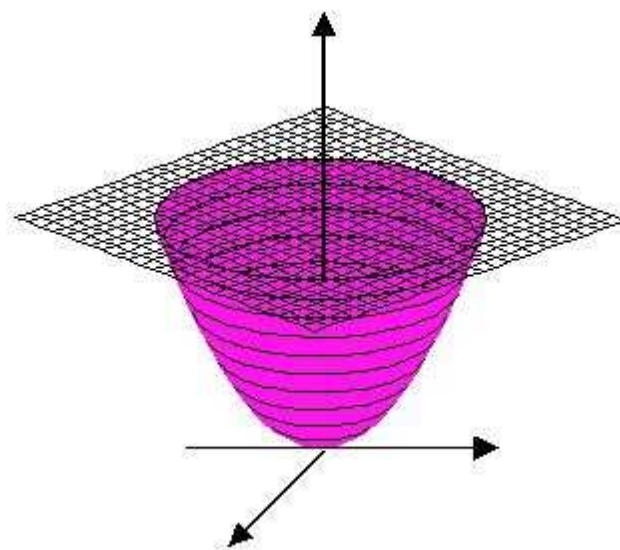
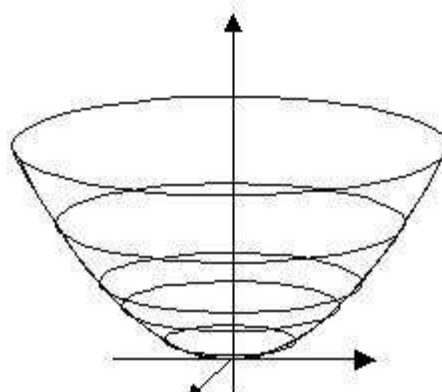
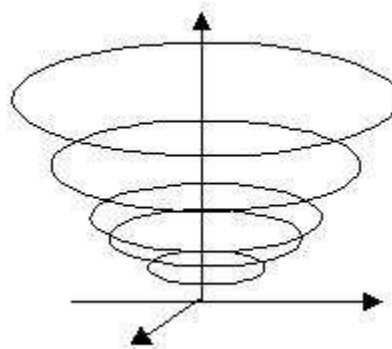
Para considerar a intersecção da superfície com o plano  $YOZ$ , substituímos  $x = 0$  na equação  $z = x^2 + y^2$  obtendo a equação da parábola  $z = y^2$ . Portanto a superfície é gerada pela rotação desta parábola em torno de  $OZ$  (é um parabolóide de revolução).

Na figura ao lado temos um esboço do sólido limitado pela superfície e pelo plano  $z = 1$ .

Cálculo do volume:

Para todo  $z \in [0, 1]$  a seção plana transversal a  $OZ$  é um círculo cujo raio é  $\sqrt{z}$ . Então a seção plana tem área  $A = \pi(\sqrt{z})^2 = \pi z$  e o volume do sólido é dado por

$$V = \pi \int_0^1 z \, dz = \frac{\pi}{2} [z^2]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$



**Exemplo 1.9.** Represente graficamente e calcule o volume do sólido limitado pelo plano  $z = 1$  e a superfície de equação  $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$  (\*)

### Solução

Representação gráfica:

Como no exemplo anterior, a intersecção de um plano de equação  $z = c$ ,  $c$  constante, com a superfície, obtém-se substituindo  $z = c$  na equação (\*), resultando  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = c$

Logo, a intersecção é:

- Vazia, se  $c < 0$ .
- $(0, 0)$ , se  $c = 0$ .
- Uma elipse no plano  $z = c$ , de equação  $\frac{x^2}{(2\sqrt{c})^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{c})^2} = 1$  e portanto com semi-eixos  $2\sqrt{c}$  e  $3\sqrt{c}$  se  $c > 0$ .

Para considerar a intersecção da superfície com o plano  $YOZ$  e com o plano  $XOZ$ , substituímos  $x = 0$  e  $y = 0$  na equação (\*) obtendo as parábolas  $z = \frac{y^2}{9}$  e  $z = \frac{x^2}{4}$ .

Trata-se de um parabolóide elíptico. Ou seja, a representação gráfica é semelhante à do parabolóide de revolução - basta substituir os círculos por elipses.

Cálculo do volume:

Para todo  $z \in [0, 1]$  a seção plana transversal a  $OZ$  é uma elipse com semi-eixos  $2\sqrt{z}$  e  $3\sqrt{z}$ . Então essa seção plana tem área  $A = \pi(2\sqrt{z})(3\sqrt{z}) = 6\pi z$  e o volume do sólido é dado por

$$V = 6\pi \int_0^1 z \, dz = 3\pi [z^2]_0^1 = 3\pi.$$

**Exemplo 1.10.** Represente graficamente e calcule o volume do elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \quad (*).$$

### Solução

Representação gráfica:

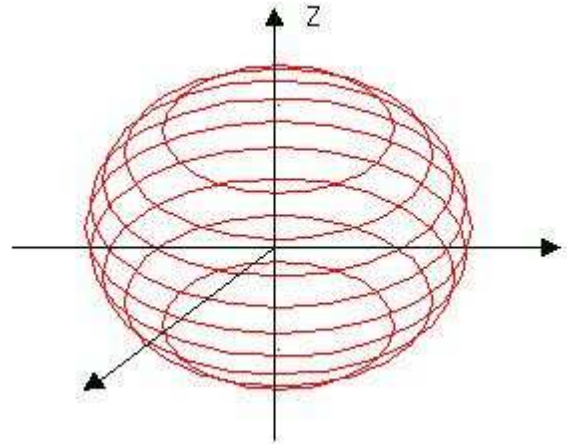
Como no exemplo anterior, a intersecção de um plano de equação  $z = c$ ,  $c$  constante, com

a superfície, obtém-se substituimos  $z = c$  na equação (\*) resultando na equação,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + c^2 = 1 \Leftrightarrow \overbrace{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}^{\geq 0} = 1 - c^2$$

De acordo com o sinal de  $1 - c^2$ , temos que a intersecção é:

- Vazia, se  $c > 1$  ou  $c < -1$ .
- $(0, 0)$ , se  $c = -1$  ou  $c = 1$
- Uma elipse no plano  $z = c$ , de equação  $\frac{x^2}{(2\sqrt{1-c^2})^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{1-c^2})^2} = 1$  e portanto com semi-eixos  $2\sqrt{1-c^2}$  e  $3\sqrt{1-c^2}$ , se  $-1 < c < 1$



As seções transversais a  $OX$  também são elipses, de equações

$$\frac{z^2}{\left(\sqrt{1-\frac{c^2}{4}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(3\sqrt{1-\frac{c^2}{4}}\right)^2} = 1,$$

obtidas fazendo-se  $x = c$  na equação (\*), para  $-2 < c < 2$ . De modo análogo temos que as seções transversais a  $OY$  são elipses.

A seguir temos um esboço do sólido

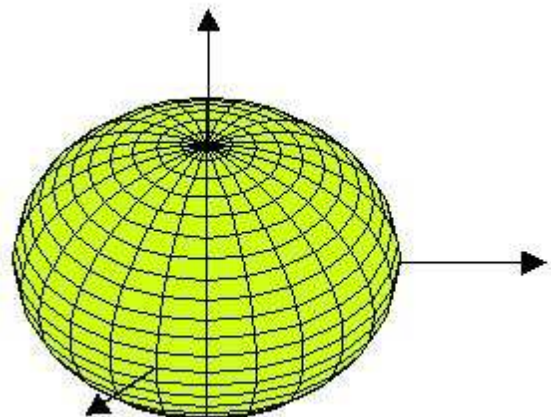
Cálculo do volume:

Para todo  $z \in [-1, 1]$  a seção plana transversal a  $OZ$  é uma elipse com semi-eixos  $2\sqrt{1-z^2}$  e  $3\sqrt{1-z^2}$ . Então essa seção plana tem área

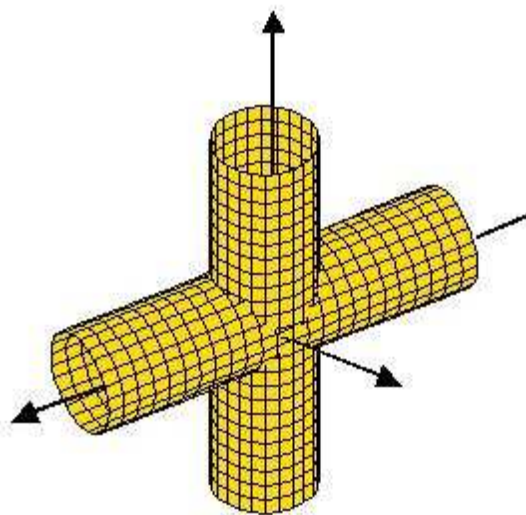
$$A = \pi(2\sqrt{1-z^2})(3\sqrt{1-z^2}) = 6\pi(1-z^2)$$

e o volume do sólido é dado por

$$V = 6\pi \int_{-1}^1 (1-z^2) dz = 6\pi \left[ z - \frac{z^3}{3} \right]_{-1}^1 = 8\pi.$$



Exemplo 1.11. Calcule o volume do sólido que é intersecção dos cilindros  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + z^2 = 1$  (figura ao lado)



Solução

Cálculo do volume:

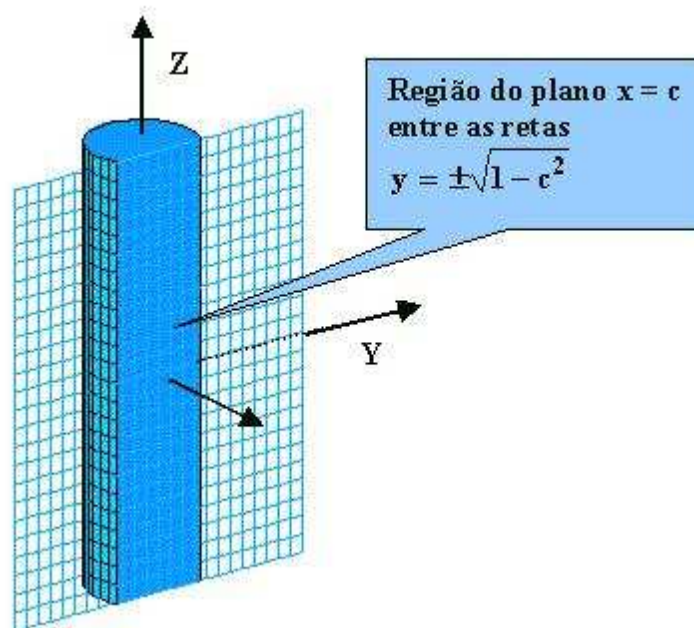
Tomemos o eixo  $OX$  e as intersecções de cada um dos cilindro com planos perpendiculares a esse eixo. Para o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , fazendo  $x = c$ ,  $c$  constante, na equação desse cilindro obtemos

$$c^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - c^2}$$

Logo a intersecção com o plano

$x = c$  é:

- Vazia, se  $c > 1$  ou  $c < -1$ .
- A reta do plano  $x = c$  de equação  $y = 0$ , se  $c = -1$  ou  $c = 1$
- A região do plano  $x = c$  limitada pelas duas retas paralelas  $y = \pm\sqrt{1 - c^2}$  se  $-1 < c < 1$ .



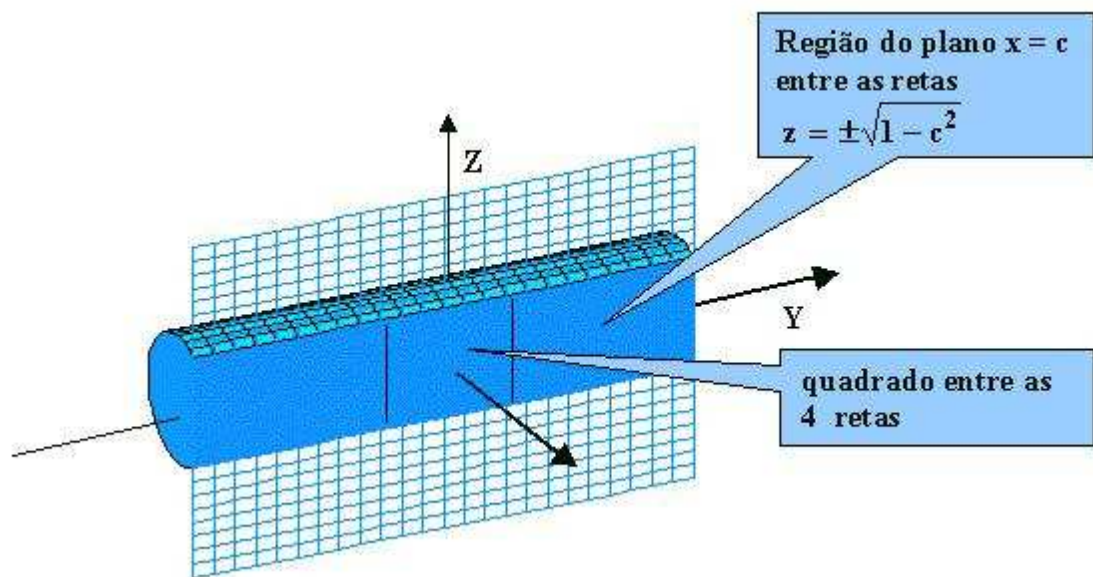
De modo semelhante, para o cilindro  $x^2 + z^2 = 1$ , fazendo  $x = c$ ,  $c$  constante, na equação desse cilindro obtemos

$$c^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{1 - c^2}$$



Logo a intersecção com o plano  $x = c$  é:

- Vazia, se  $c > 1$  ou  $c < -1$ .
- A reta do plano  $x = c$  de equação  $z = 0$ , se  $c = -1$  ou  $c = 1$
- A região do plano  $x = c$  limitada pelas duas retas paralelas  $z = \pm\sqrt{1-c^2}$  se  $-1 < c < 1$



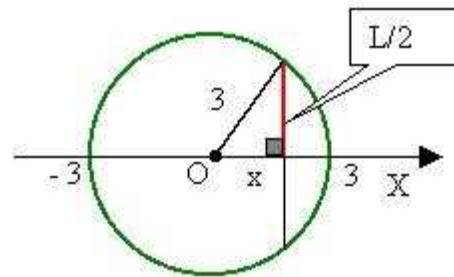
Portanto a intersecção dos dois cilindros com o plano  $x = c$  é vazia se  $c > 1$  ou  $c < -1$  e é um quadrado (veja figura anterior) de lado  $L = 2\sqrt{1-c^2}$  e o volume do sólido é

$$V = \int_{-1}^1 L^2 dx = \int_{-1}^1 (2\sqrt{1-x^2})^2 dx = 4 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \frac{16}{3}.$$

Exemplo 1.12. Calcular o volume do sólido cuja base é um círculo de raio 3 e cujas seções transversais a um diâmetro da base são quadrados.

Solução

Tomemos um eixo orientado cuja origem é o centro do círculo e que contém o diâmetro (figura ao lado). A seção transversal em  $x$  é um quadrado de lado  $L$  que varia com  $x$ . Logo, sua área é igual a  $A = L^2$ , o volume do sólido é

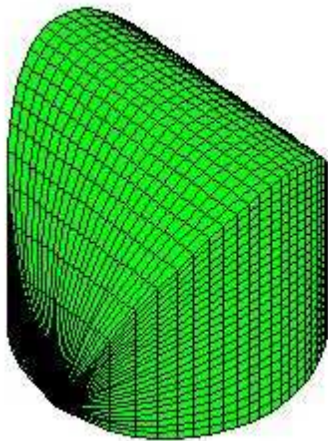
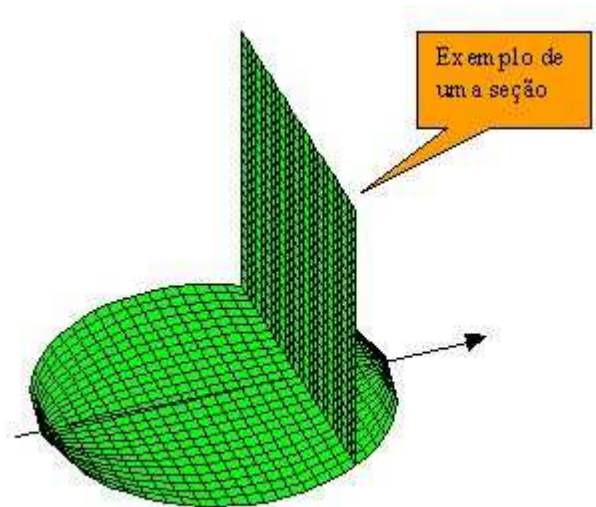


$$V = \int_{-3}^3 L^2 dx = 2 \int_0^3 L^2 dx \text{ (usando simetria)}$$

$$\text{e } \left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2 = 3^2 \Leftrightarrow L^2 = 4(9 - x^2)$$

Portanto,

$$V = 8 \int_0^3 (9 - x^2) dx = 8 \left[ 9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 144$$





Exemplo 1.13. Calcular o volume do sólido cuja base é uma elipse de semi-eixos iguais a 2 e 3 e cujas seções transversais ao eixo maior são triângulos equiláteros.

Solução

Tomemos um sistema de eixos cartesianos tal que  $OX$  coincida com o eixo maior (figura ao lado) e  $O$  coincida com o centro da elipse. Nesse sistema de eixos a elipse tem equação

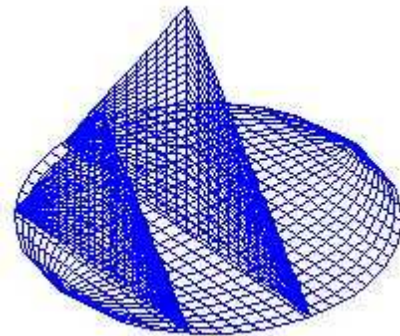
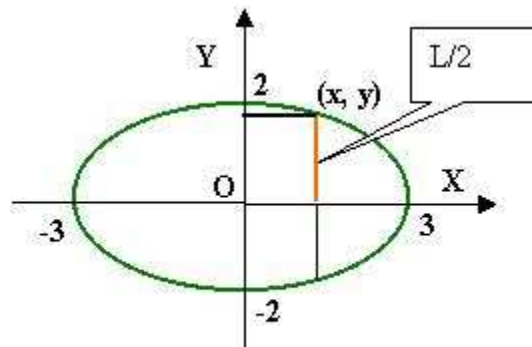
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

A seção transversal em  $x$  é um triângulo equilátero de lado  $L$  que varia com  $x$ . Logo, sua área é igual a  $A = \frac{\sqrt{3}L^2}{4}$  o volume do sólido é

$$V = \int_{-3}^3 \frac{\sqrt{3}L^2}{4} dx = 2 \int_0^3 \frac{\sqrt{3}L^2}{4} dx \text{ (usando simetria)}$$

Como  $L = 2y$  então ( pela equação da elipse)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^3 \sqrt{3} \cdot 4y^2 dx = 2\sqrt{3} \int_0^3 4 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) dx = \\ &= 8\sqrt{3} \left[ x - \frac{x^3}{27} \right]_0^3 = 16\sqrt{3}. \end{aligned}$$



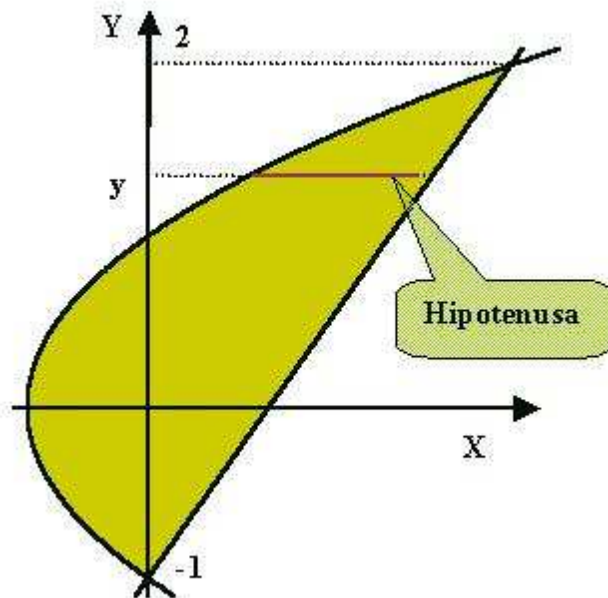
Exemplo 1.14. Calcular uma expressão em integrais que represente o volume do sólido cuja base é a região do plano limitada pela parábola  $x = y^2 - 1$  e a reta  $x = y + 1$  e cujas seções transversais a  $OY$  são triângulos retângulos, isósceles tais que a hipotenusa se encontra sobre a base do sólido.

Solução

A região  $R$  está representada na figura ao lado.

A seção transversal em  $y$  é um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa  $b$  e altura  $h$  (relativa a hipotenusa), que variam com  $y$ .

Logo, sua área é  $A = \frac{bh}{2} = \frac{b^2}{4}$   
 O volume do sólido é  $V = \int_{-1}^2 \frac{b^2}{4} dy$

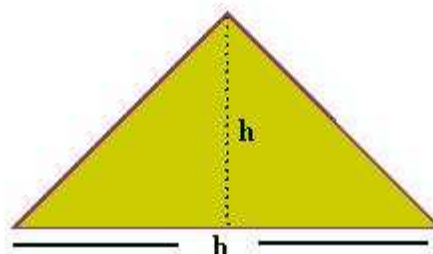


Como

$$b = x_1 - x_2 = y + 1 - (y^2 - 1) = -y^2 + y + 2$$

Então

$$V = \int_{-1}^2 \frac{(-y^2 + y + 2)^2}{4} dy = \frac{81}{40}$$



**Exemplo 1.15.** Calcular uma expressão em integrais que represente o volume do sólido cuja base é um triângulo retângulo  $ABC$  de catetos  $AB$  e  $AC$  com comprimentos 3 e 4 e cujas seções transversais a  $AC$  são semi-círculos com diâmetros sobre a base do sólido.

**Solução**

Considerando o eixo  $OX$  como indicado na

figura ao lado, a seção transversal em  $x$  tem área  $A = \frac{\pi r^2}{2}$  sendo  $r$  o raio do semi-círculo.

O volume do sólido é

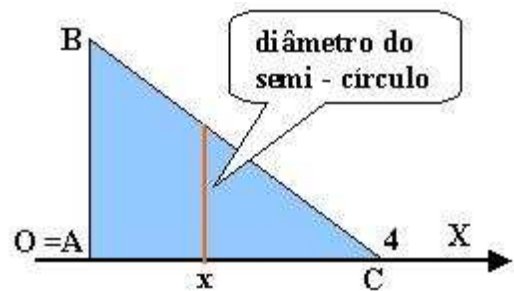
$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^4 r^2 dx$$

Usando semelhança de triângulos

$$\frac{3}{4} = \frac{2r}{4-x} \Rightarrow \frac{3(4-x)}{8} = r$$

Logo,

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^4 \frac{9(4-x)^2}{64} dx = \frac{3\pi}{2}$$



---

**1.4 Exercícios**

[1] Utilizando seções planas paralelas, mostre que o volume de uma pirâmide quadrangular reta, com altura  $h$  e base quadrada de lado  $a$ , é igual a  $\frac{a^2h}{3}$ .

[2] Utilizando integral de seções planas paralelas, mostre que o volume do cone circular reto, de altura  $h$  e raio da base  $r$ , é igual a  $\frac{\pi r^2h}{3}$ .

[3] Usando o Cálculo Integral, calcule o volume de um tronco de pirâmide, de altura  $h$ , cuja base é um quadrado de lado  $a$  e cujo topo é um quadrado de lado  $b$ .

[4] Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio  $r$  e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são triângulos equiláteros, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como um dos seus lados cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

[5] Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio  $r$  e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são triângulos retângulos isósceles, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como um dos seus catetos cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

[6] Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio  $r$  e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são triângulos retângulos isósceles, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como hipotenusa cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

[7] Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio  $r$  e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são semi-elipses, todas situadas em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm o eixo menor como cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro e a medida do eixo maior igual ao dobro da medida do eixo menor. (Considere a área da elipse de semi-eixos maior e menor  $a$  e  $b$ , respectivamente, igual a  $\pi ab$ ).

[8] Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio  $r$  e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são semi-elipses, todas contidas em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm o eixo menor como cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro e todas elas têm a mesma

excentricidade  $e$ .

[9] Calcule o volume de um sólido que tem para base uma elipse de semi-eixo maior e menor  $a$  e  $b$ , respectivamente, e cujas seções transversais ao eixo menor são semi-círculos, todos situados em um mesmo semi-espço em relação ao plano que a contem, e tendo para diâmetros cordas da elipse da base, perpendiculares ao eixo menor.

[10] Calcule o volume de um sólido que tem para base uma elipse de semi-eixo maior e menor  $a$  e  $b$ , respectivamente, e cujas seções transversais ao eixo maior são semi-círculos, todos situados em um mesmo semi-espço em relação ao plano que a contem, e tendo para diâmetros cordas da elipse da base, perpendiculares ao eixo maior. (Observe que esse volume é menor do que o volume do item anterior).

[11] Calcule o volume do sólido de base  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 \leq x \leq 3 - 3y^2\}$  cujas seções por planos perpendiculares ao eixo  $Ox$  são quadrados com um lado apoiado em  $B$ .

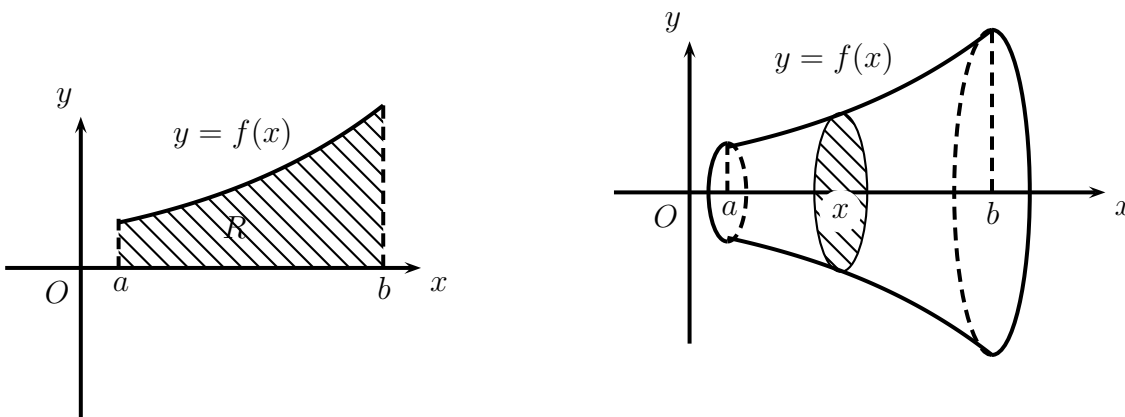
## 1.5 Volume de sólidos de revolução

Quando rotacionamos uma região do plano  $xy$  em torno de uma reta (o eixo) realizando uma volta completa, o lugar geométrico descrito pelo pontos da região é o que chamamos um sólido de revolução.

Estudamos dois métodos como calcular volumes de sólidos de revolução:

### Método do disco circular e do anel circular

Suponhamos que um sólido de revolução é obtido rotacionando-se, em torno do eixo  $x$ , uma região  $R$  delimitada pela curva  $y = f(x)$ , sendo  $f$  uma função contínua num intervalo  $[a, b]$ ,  $f(x) \geq 0$ , e pelas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , como mostra a figura abaixo.



Para cada  $x \in [a, b]$ , um plano perpendicular ao eixo  $x$ , cortando este no ponto  $x$ , determina no sólido de revolução uma seção transversal que é um círculo centrado em  $(x, 0)$  e raio  $f(x)$  e portanto cuja area  $A(x) = \pi[f(x)]^2$ .

Portanto, o volume do sólido de revolução é

$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

- Se um sólido de revolução  $S$  é obtido rotacionando-se em torno de eixo  $y$ , uma região  $R$  delimitada pela curva  $x = g(y)$ ,  $g$  contínua em  $[c, d]$ ,  $g(y) \geq 0$ , e pelas retas horizontais  $y = c$  e  $y = d$ , o volume  $V$  de  $S$  é dado por

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy.$$

- Se um sólido de revolução  $S$  é obtido rotacionando-se em torno de eixo  $x$ , uma região delimitada pelas curvas  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  e pelas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , sendo  $f_1(x) \geq f_2(x)$  para  $a \leq x \leq b$ , o volume  $V$  de  $S$  é dado por

$$V = \pi \int_a^b \left( [f_1(x)]^2 - [f_2(x)]^2 \right) dx.$$

- Se um sólido de revolução  $S$  é obtido rotacionando-se em torno de eixo  $y$ , uma região delimitada pelas curvas  $x = g_1(y)$ ,  $x = g_2(y)$  e pelas retas horizontais  $y = c$  e  $y = d$ , sendo  $g_1(y) \geq g_2(y)$  para  $c \leq y \leq d$ , o volume  $V$  de  $S$  é dado por

$$V = \pi \int_c^d \left( [g_1(y)]^2 - [g_2(y)]^2 \right) dy.$$

- Se um sólido de revolução  $S$  é obtido rotacionando-se em torno da reta  $x = k$ , uma região delimitada pelas curvas  $x = g_1(y)$ ,  $x = g_2(y)$  e pelas retas horizontais  $y = c$  e  $y = d$ , sendo  $g_1(y) \geq g_2(y) > k$  para  $c \leq y \leq d$ , o volume  $V$  de  $S$  é dado por

$$V = \pi \int_c^d \left( [g_1(y) - k]^2 - [g_2(y) - k]^2 \right) dy.$$

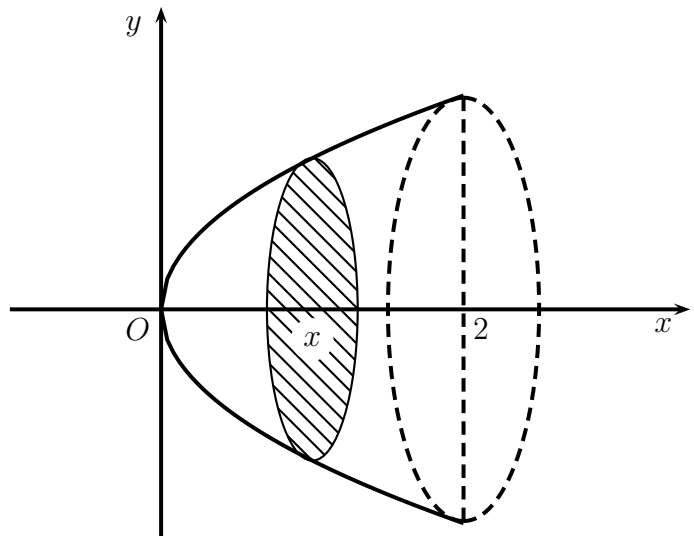
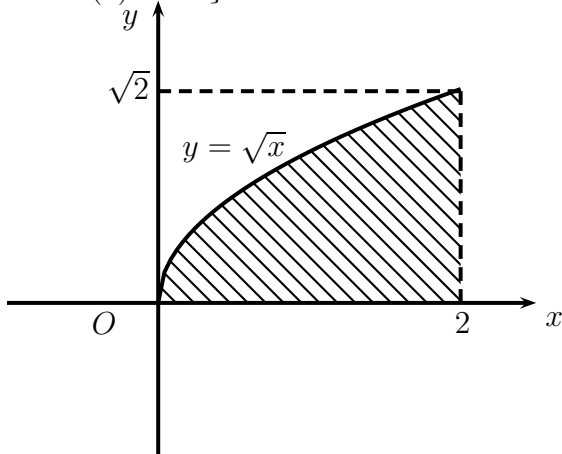
- Se um sólido de revolução  $S$  é obtido rotacionando-se em torno da reta  $y = k$ , uma região delimitada pelas curvas  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  e pelas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , sendo  $f_1(x) \geq f_2(x) > k$  para  $a \leq x \leq b$ , o volume  $V$  de  $S$  é dado por

$$V = \pi \int_a^b \left( [f_1(x) - k]^2 - [f_2(x) - k]^2 \right) dx.$$

Exemplo 1.16. Considere a região do plano delimitada pelo eixo  $x$ , o gráfico de  $y = \sqrt{x}$ , para  $0 \leq x \leq 2$ , sendo girada primeiro ao redor do eixo  $x$  e depois ao redor do eixo  $y$ . Calcule o volume dos 2 sólidos gerados.

Solução

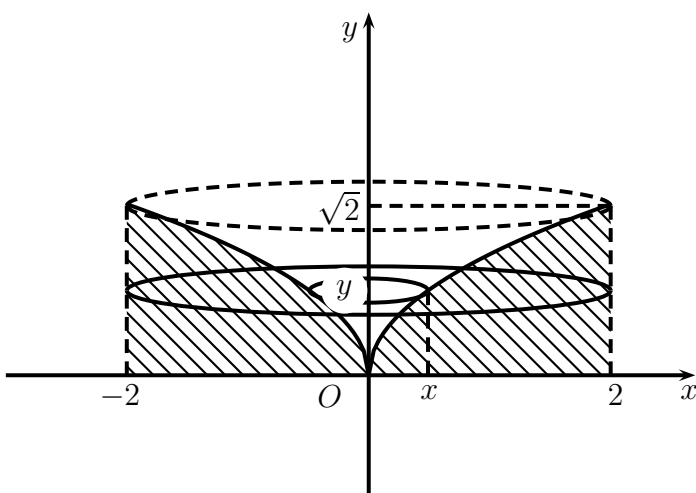
(a) Rotação em torno do eixo  $x$



Para cada  $x \in [0, 2]$ , a seção transversal ao eixo  $Ox$  é um círculo gerado pela rotação do segmento vertical de comprimento  $y = \sqrt{x}$ . Logo, possui área  $A(x) = \pi y^2$  e o volume do sólido é igual a

$$V = \int_0^2 \pi y^2 dx = \int_0^2 \pi x dx = 2\pi.$$

(b) Rotação em torno do eixo  $y$



Para cada  $y \in [0, \sqrt{2}]$ , a seção transversal ao eixo  $Oy$  é um anel circular de raio externo igual 2 e raio interno igual  $x = y^2$  e portanto tem área igual  $A(y) = \pi 2^2 - \pi x^2 = 4\pi - \pi y^4 = \pi(4 - y^4)$ . Logo o volume do sólido é igual a

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (4 - y^4) dy = \frac{16\sqrt{2}\pi}{5}.$$



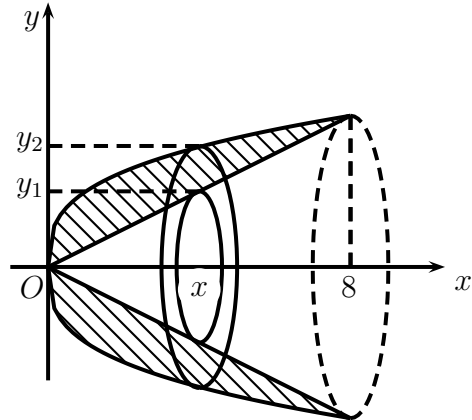
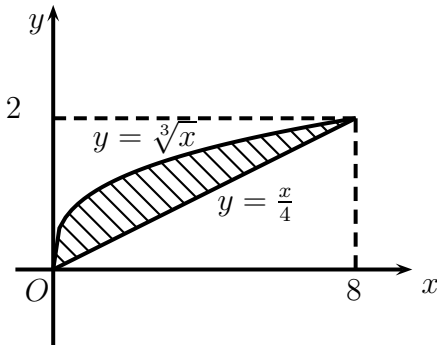
Exemplo 1.17. Determine o volume do sólido obtido pela rotação da parte da região delimitada por  $y = \sqrt[3]{x}$  e  $y = x/4$  na primeira quadrante ao redor do eixo  $x$  e depois ao redor do eixo  $y$ .

Solução

Pontos de Interseção:

$$x^{1/3} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 8 \text{ e } y = 0, y = \pm 2.$$

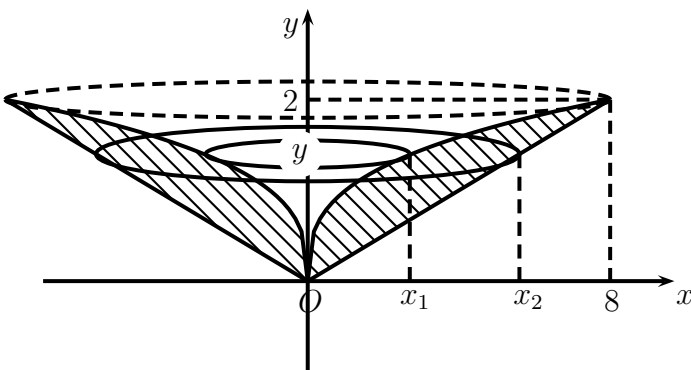
(a) Rotação em torno do eixo  $x$



Para cada  $x \in [0, 8]$ , a seção transversal ao eixo  $Ox$  é um anel circular de raio externo  $y_2 = \sqrt[3]{x}$  e raio interno  $y_1 = \frac{x}{4}$  e portanto tem área  $A(x) = \pi(\sqrt[3]{x})^2 - \pi(\frac{x}{4})^2 = \pi(x^{2/3} - \frac{x^2}{16})$ . Logo o volume do sólido é igual a

$$V = \pi \int_0^8 \left(x^{2/3} - \frac{x^2}{16}\right) dx = \frac{128\pi}{15}.$$

(b) Rotação em torno do eixo  $y$



Para cada  $y \in [0, 2]$ , a seção transversal ao eixo  $Oy$  é um anel circular de raio externo  $x_2 = 4y$  e raio interno igual  $x_1 = y^3$  e portanto tem área igual  $A(y) = \pi(4y)^2 - \pi(y^3)^2 = \pi(16y^2 - y^6)$ . Logo o volume do sólido é igual a

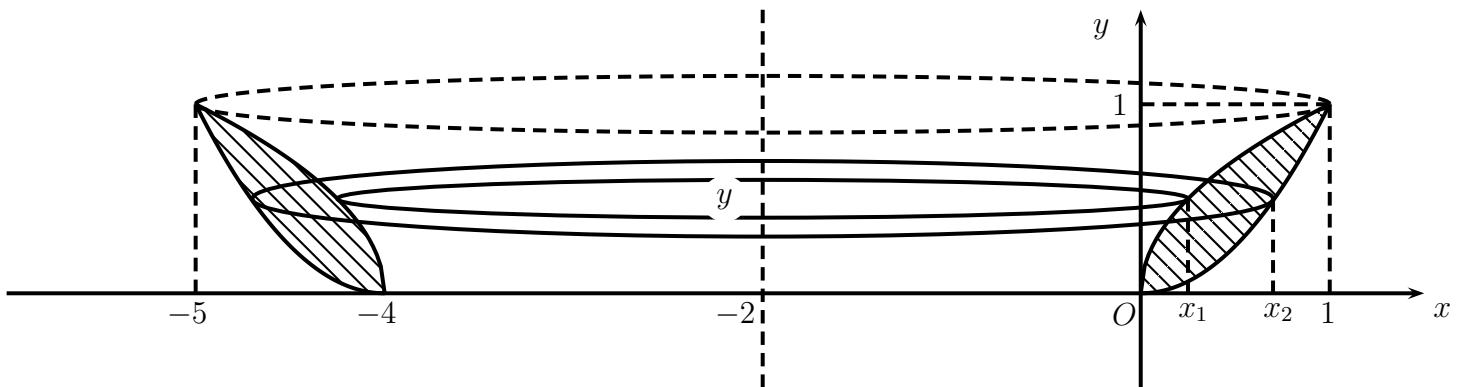
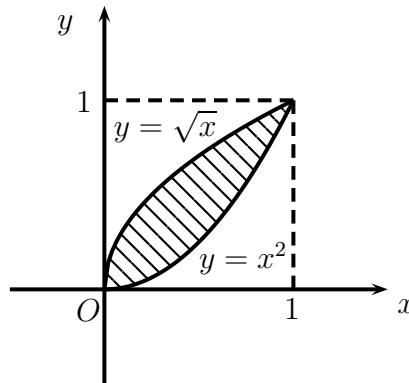
$$V = \pi \int_0^2 (16y^2 - y^6) dy = \frac{512\pi}{21}.$$

Exemplo 1.18. Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas  $y = x^2$  e  $y = \sqrt{x}$ , ao redor da reta  $x = -2$ .

Solução

Pontos de Interseção:

$$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 0, x = 1$$



Para cada  $y \in [0, 1]$ , a seção transversal a reta  $x = -2$  é um anel circular de raio externo  $(x_2 + 2) = (\sqrt{y} + 2)$  e raio interno  $(x_1 + 2) = (y^2 + 2)$  e portanto tem área

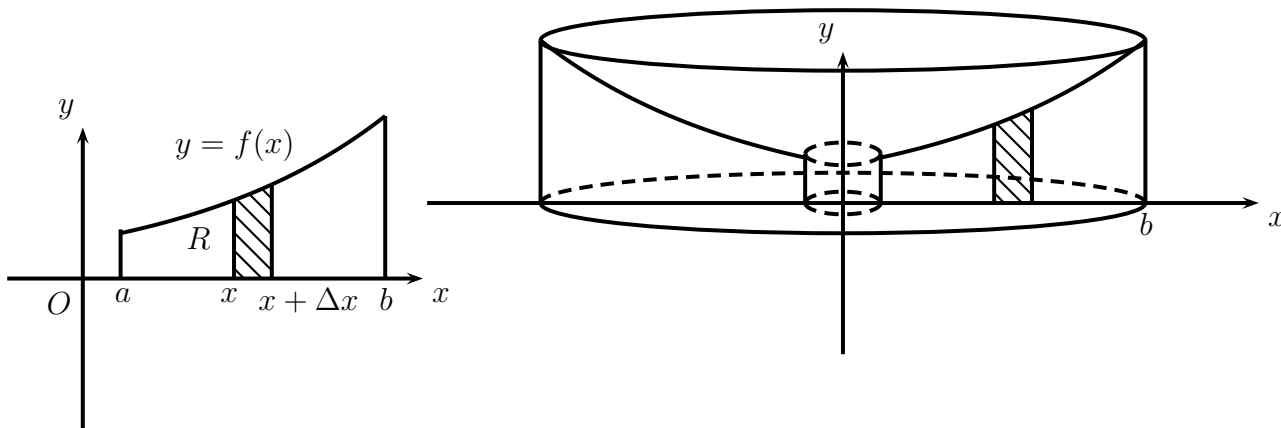
$$A(y) = \pi(\sqrt{y} + 2)^2 - \pi(y^2 + 2)^2 = \pi(y + 4y^{1/2} - y^4 - 4y^2).$$

Logo o volume do sólido é igual a

$$V = \pi \int_0^1 (y + 4y^{1/2} - y^4 - 4y^2) dy = \frac{49\pi}{30}.$$

Usamos este método quando a rotação é feita em torno do eixo do variável dependente  $y$ , ( $y = f(x)$ ) e é impossível de escreve  $x$  como função de  $y$ .

Suponhamos que um sólido de revolução é obtido rotacionando-se, em torno do eixo  $y$ , uma região  $R$  delimitada pela curva  $y = f(x)$ , sendo  $f$  uma função contínua num intervalo  $[a, b]$ ,  $f(x) \geq 0$ , e pelas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , como mostra a figura abaixo.



Dividimos  $R$  em faixas verticais de largura infinitésima  $\Delta x$  como mostrado na Figura. Quando uma faixa vertical é girada em torno do eixo  $y$ , ela gera uma casca cilíndrica de espessura  $\Delta x$  e volume  $\Delta V$ . Esta casca cilíndrica é a diferença entre um cilindro exterior do raio  $(x + \Delta x)$  e um cilindro interior do raio  $x$ . Ambos os cilindros têm a altura infinitamente próximo a  $f(x)$ . Assim o volume desta casca cilíndrica é

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx \text{cilindro exterior} - \text{cilindro interior} \\ &\approx \pi(x + \Delta x)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) \\ &= \pi(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2) f(x) \\ &= \pi(2x\Delta x + (\Delta x)^2) f(x) \\ \Delta V &\approx 2\pi x f(x) \Delta x \end{aligned}$$

O volume total do sólido de revolução será, de acordo com o Teorema Fundamental,

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

## 1.2 Observação. Denotamos

$$A(x) = 2\pi x f(x) = 2\pi(\text{raio})(\text{altura})$$

Ou seja  $A(x)$  representa a área lateral de um cilindro de raio  $x$  e altura  $f(x)$ .

- Se um sólido de revolução  $S$  é obtido rotacionando-se em torno de eixo  $x$ , uma região delimitada pela curva  $x = g(y)$ ,  $g$  contínua em  $[c, d]$ ,  $g(y) \geq 0$ , e pelas retas horizontais  $y = c$  e  $y = d$ , o volume  $V$  de  $S$  é dado por

$$V = \int_c^d 2\pi y g(y) dy.$$

- Se um sólido de revolução  $S$  é obtido rotacionando-se em torno de eixo  $y$  uma região delimitada pelas curvas  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  e pelas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , sendo  $f_1(x) \geq f_2(x)$  para  $a \leq x \leq b$ , o volume  $V$  de  $S$  é dado por

$$V = \int_a^b 2\pi x (f_1(x) - f_2(x)) dx.$$

- Se um sólido de revolução  $S$  é obtido rotacionando-se em torno de eixo  $x$ , uma região delimitada pelas curvas  $x = g_1(y)$ ,  $x = g_2(y)$  e pelas retas horizontais  $y = c$  e  $y = d$ , sendo  $g_1(y) \geq g_2(y)$  para  $c \leq y \leq d$ , o volume  $V$  de  $S$  é dado por

$$V = \int_c^d 2\pi y (g_1(y) - g_2(y)) dy.$$

- Se um sólido de revolução  $S$  é obtido rotacionando-se em torno da reta  $y = k$ , uma região delimitada pelas curvas  $x = g_1(y)$ ,  $x = g_2(y)$  e pelas retas horizontais

$y = c$  e  $y = d$ , sendo  $g_1(y) \geq g_2(y) > k$  para  $c \leq y \leq d$ , o volume  $V$  de  $S$  é dado por

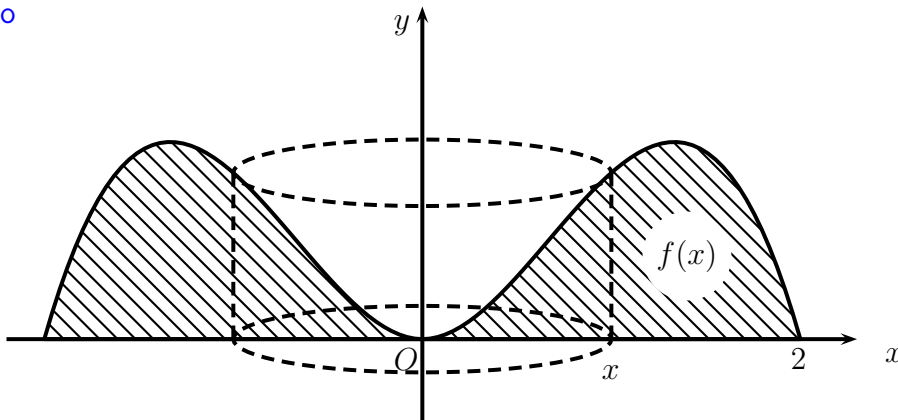
$$V = \int_c^d 2\pi|y - k|(g_1(y) - g_2(y)) dy.$$

- Se um sólido de revolução  $S$  é obtido rotacionando-se em torno da reta  $x = k$ , uma região delimitada pelas curvas  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  e pelas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , sendo  $f_1(x) \geq f_2(x) > k$  para  $a \leq x \leq b$ , o volume  $V$  de  $S$  é dado por

$$V = \int_a^b 2\pi|x - k|(f_1(x) - f_2(x)) dx.$$

**Exemplo 1.19.** Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pela parábola  $y = 2x^2 - x^3$  o eixo  $x$  em torno do eixo  $y$ .

Solução



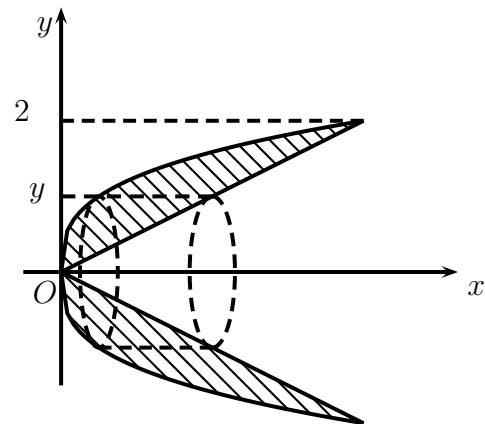
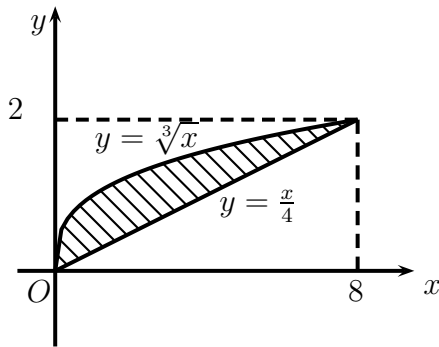
$$A(x) = 2\pi(\text{raio})(\text{altura}) = 2\pi x(2x^2 - x^3) = 2\pi(2x^3 - x^4)$$

Logo

$$V = \int_0^2 2\pi(2x^3 - x^4) dx = \frac{16\pi}{5}$$

Exemplo 1.20. Determine o volume do sólido obtido pela rotação da parte da região delimitada por  $y = \sqrt[3]{x}$  e  $y = x/4$  na primeira quadrante ao redor do eixo  $x$ .

Solução



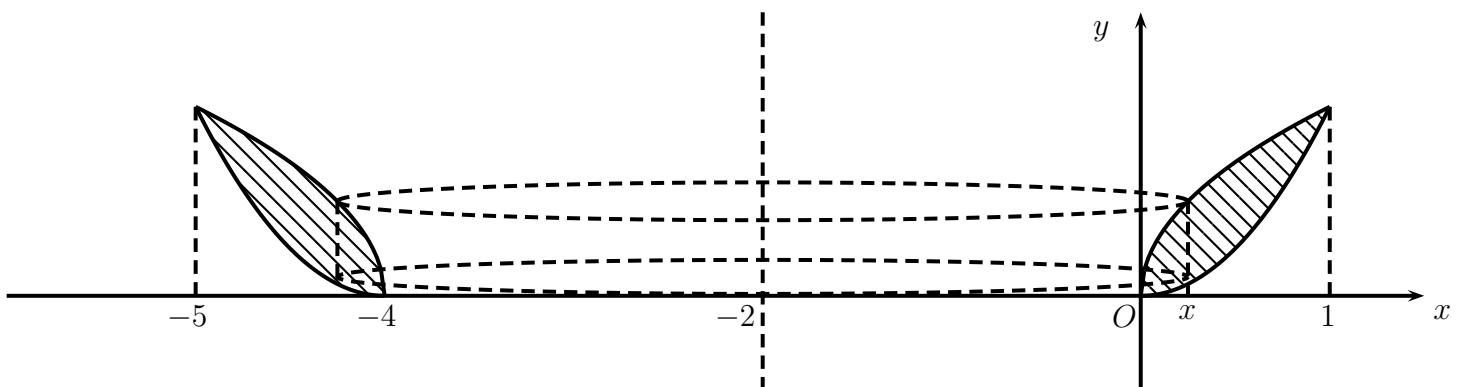
$$A(y) = 2\pi(\text{raio})(\text{altura}) = 2\pi y(4y - y^3) = 2\pi(4y^2 - y^4)$$

Logo

$$V = \int_0^2 2\pi(4y^2 - y^4) dy = \frac{128\pi}{15}$$

Exemplo 1.21. Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas  $y = x^2$  e  $y = \sqrt{x}$ , ao redor da reta  $x = -2$ .

Solução



$$A(x) = 2\pi(\text{raio})(\text{altura}) = 2\pi(x + 2)(\sqrt{x} - x^2) = 2\pi(x^{3/2} - x^3 + 2x^{1/2} - 2x^2)$$

Logo

$$V = \int_0^1 2\pi(x^{3/2} - x^3 + 2x^{1/2} - 2x^2) dx = \frac{49\pi}{30}$$

---

**1.6 Exercícios**

[1] Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região do plano limitada pelo gráfico da função  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , com  $x \in [-1, 1]$ , em torno do eixo  $Ox$ .

[2] Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região do plano limitada pelo gráfico da elipse  $E : 9x^2 + y^2 = 9$  em torno do:

(2.1) Eixo maior            (2.2) Eixo menor.

[3] Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região compreendida entre o(s) gráfico(s) de:

(3.1)  $y = (x - 1)(x - 3)^2$  e o eixo  $x$ , ao redor do eixo  $y$

(3.2)  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = 8$  e o eixo  $x$ , ao redor do eixo  $x$

(3.3)  $y = 2\sqrt{x - 1}$  e  $y = x - 1$ , ao redor da reta  $x = 6$

(3.4)  $x = (y - 2)^2$  e  $y = x$ , ao redor da reta  $y = 1$

(3.5)  $y = \sin x$ , para  $0 \leq x \leq \pi$ , ao redor do eixo  $x$

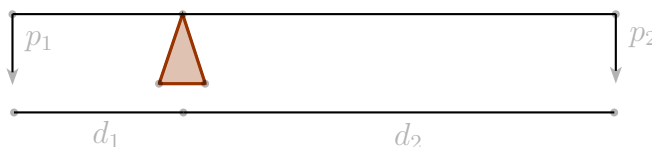
## 1.7 Momentos estáticos e centróides

No nosso dia-a-dia, nos deparamos com muitas situações em que precisamos manter um sistema de corpos em equilíbrio. Para conseguirmos apoiar uma placa plana em uma haste fina, de forma que a mesma fique em equilíbrio, o ponto de apoio da haste deve estar localizado no centro de massa ou centróide da placa, considerando-se o campo gravitacional uniforme. Ou até mesmo para arrumar a carga de um caminhão é necessário que a mesma esteja em equilíbrio para evitar acidentes por tombamento da carga, ou desgastes de pneus e suspensão. Daí, temos necessidade de determinar o centro de massa ou centróide não só de placas planas de formatos variados, como também arames, fios, e sólidos tri-dimensionais. Ao longo desse trabalho vamos mostrar como encontrar centro de massa ou centróides como aplicação do cálculo integral em várias situações.

Vale ressaltar nesse momento a diferença entre centro de massa e centro de gravidade. O centro de massa independe de fatores externo, como por exemplo da aceleração da gravidade local. Já o centro de gravidade depende do campo gravitacional. Assim, o centro de massa e o centro de gravidade só coincidem quando o campo gravitacional for uniforme.

Como podemos encontrar o centro de massa?

Inicialmente vamos imaginar uma situação bem simples, como por exemplo uma gangorra. A gangorra está apoiado num suporte como mostra a figura a seguir.



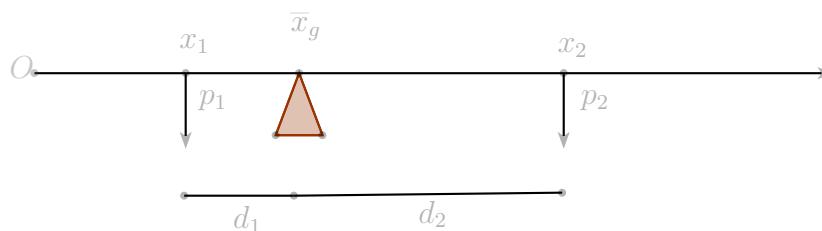
Vamos considerar duas pessoas sentadas nas extremidades com pesos  $p_1$  e  $p_2$  e distâncias ao ponto de apoio  $d_1$  e  $d_2$  respectivamente. Pela lei da Alavanca de Arquimedes a gangorra só estará em equilíbrio se:

$$p_1 \cdot d_1 = p_2 \cdot d_2.$$

Agora vamos analisar a situação do ponto de vista uni-dimensional, considerando



a origem da reta real como mostra a figura abaixo e denotaremos por  $\bar{x}_g$  o centro de gravidade da gangorra, ou seja, o ponto de apoio de forma que a gangorra fique em equilíbrio, considerando as condições anteriores.



Nesse caso temos que  $d_1 = \bar{x}_g - x_1$  e  $d_2 = x_2 - \bar{x}_g$ .

Aplicando a lei da Alavanca, temos

$$\begin{aligned} p_1 \cdot (\bar{x}_g - x_1) &= p_2 \cdot (x_2 - \bar{x}_g) \\ p_1 \cdot \bar{x}_g - p_1 \cdot x_1 &= p_2 \cdot x_2 - p_2 \cdot \bar{x}_g \\ p_1 \cdot \bar{x}_g - p_2 \cdot \bar{x}_g &= p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \\ \bar{x}_g \cdot (p_1 + p_2) &= p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Daí, podemos concluir que

$$\bar{x}_g = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2}{p_1 + p_2} \tag{1.1}$$

Desde quando o peso, segundo a lei de Newton é a força exercida sobre o corpo pela atração gravitacional da Terra temos que  $p_1 = m_1 \cdot g$  e  $p_2 = m_2 \cdot g$ , em que  $m_1$  e  $m_2$  são as massas das pessoas que estão sentadas na gangorra e  $g$  é a aceleração da gravidade aproximadamente igual à  $9,8m/s$ . Com essas consideração a equação 1.9 é dada por

$$\bar{x}_g = \frac{g \cdot m_1 \cdot x_1 + g \cdot m_2 \cdot x_2}{g \cdot m_1 + g \cdot m_2} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.2}$$

Como nesse caso o campo gravitacional é uniforme, verificamos que o centro de gravidade ( $\bar{x}_g$ ) coincide com o centro de massa, que denotaremos por  $\bar{x} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$ .

Conseqüentemente, podemos definir o momento estático da massa de uma partícula em relação a um ponto.

### 1.3 DEFINIÇÃO. *Momento Estático*

Definimos o **momento estático** da massa  $m_1$  em relação a origem, denotado por  $M_1$ , através do produto  $M_1 = m_1 \cdot x_1$ , assim como o **momento estático** da massa  $m_2$  em relação a origem, denotado por  $M_2$ , através do produto  $M_2 = m_2 \cdot x_2$ , em que  $x_1$  e  $x_2$  representam as distâncias das massas  $m_1$  e  $m_2$  em relação a origem ou ponto referencial.

Assim como definimos o momento estático em relação a um ponto, podemos também definir o momento estático em relação a outros referências como, por exemplo, uma reta ou um plano. O momento também pode ser aplicado a outras grandezas além da massa como: momento de força, momento de comprimento, momento de área, momento de volume etc.

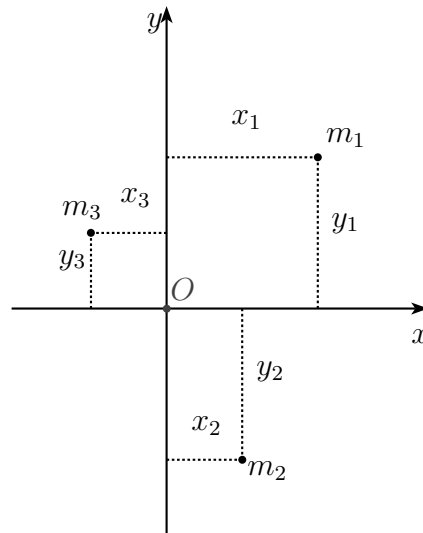
Agora vamos considerar a situação de termos um sistema de  $n$  partículas com massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  localizadas nos pontos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  respectivamente sobre o eixo Ox. Nesse caso o centro de massa do sistema é dado pela razão entre o somatório dos momentos e a massa total, como mostra a equação abaixo.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M}{m} \quad \rightarrow \quad m \cdot \bar{x} = M$$

em que  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  representa a massa total do sistema e  $M = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i$  o somatório dos momentos estáticos de cada partícula em relação a origem.

Observe que o centro de massa é um ponto em que podemos concentrar todas as massas do sistema de forma que o somatório dos momentos em relação ao referencial considerado continua o mesmo.

No caso bi-dimensional, vamos considerar que as partículas estão posicionadas no plano cartesiano, como mostrar a figura abaixo.



Seguindo um raciocínio similar ao caso uni-dimensional, já visto, só que agora tomando como referencial os eixos Ox e Oy, temos que o centróide, denotado por  $(\bar{x}, \bar{y})$ , é dado por:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m},$$

em que  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  representa a massa total do sistema, e

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i \bar{x}_i \quad \text{e} \quad M_x = \sum_{i=1}^n m_i \bar{y}_i$$

representam os somatórios dos momentos em relação aos eixos Oy e Ox respectivamente. Observe que o momento de uma partícula em relação ao eixo Ox é o produto da massa dessa partícula pela distância da mesma ao eixo Ox, que é uma distância y. Similarmente, para o momento em relação ao eixo Oy.

Assim, o ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$ , que representa o centróide, é o ponto em que uma única partícula de massa  $m$  teria os mesmos momentos do sistema.

Vamos agora nos deter ao cálculo do centro de massa ou centróide de placas planas finas de material homogêneo com densidade uniforme  $\rho$  (massa por unidade de área) e área superficial  $A$ . Inicialmente, vamos encontrar centróides de placas com formato de

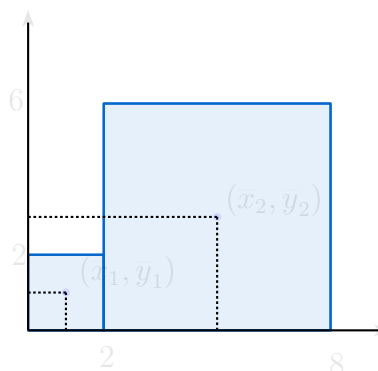
figuras planas simétricas ou que possuam eixo de simetria. Uma superfície é simétrica em relação a um eixo  $OO'$ , se para cada ponto  $P$  da superfície existe um ponto  $P'$ , tal que o segmento  $PP'$  além de ser perpendicular ao eixo  $OO'$ , é dividido ao meio pelo eixo. Analogamente, podemos verificar a simetria de uma curva. Nesse caso, ou seja, quando uma superfície ou curva possui um eixo de simetria o centróide em ambas situações estão sobre esse eixo de simetria. Caso a superfície ou curva possua dois eixos de simetria, seu centróide está na interseção desses dois eixos. Assim, facilmente podemos determinar os centróides de superfícies no formato de figuras geométricas conhecidas como: quadrados, retângulos, triângulos equiláteros, círculos, elipses etc. Similarmente, podemos identificar o centróide de curvas na forma de circunferências, elipses etc. Observe que no caso das curvas, nem sempre o centróide pertence a mesma. Ver a figura abaixo.



Quando temos superfícies compostas de várias regiões sem interseções, o momento dessa superfície é o somatório dos momentos de cada região que a compõe. Sendo a massa de cada região da superfície composta igual a  $m_i = \rho A_i$ ,  $i = 1, 2, 3 \dots$  os momentos em relação aos eixos  $Ox$  e  $Oy$  são respectivamente,

$$M_y = \sum_{i=1}^n \rho A_i \bar{x}_i \quad \text{e} \quad M_x = \sum_{i=1}^n \rho A_i \bar{y}_i.$$

Nesse caso  $\bar{x}_i$  e  $\bar{y}_i$  são as distâncias dos centróides de cada região aos eixos  $OX$  e  $Oy$  respectivamente. Observe a figura abaixo.



Exemplo 1.22. Vamos encontrar o centróide da superfície composta indicada nessa figura.

**Solução:** Já sabemos que o centróide de cada quadrado coincide com o seu centro. Assim, vamos encontrar o somatório dos momentos, considerando  $A_i$  a área do quadrado  $Q_i$  e  $\bar{y}_i$  e  $\bar{x}_i$ , suas respectivas distâncias ao eixo  $Ox$  e  $Oy$ ,  $i = 1, 2$ . Portanto

$$M_x = \rho \cdot A_1 \cdot \bar{y}_1 + \rho \cdot A_2 \cdot \bar{y}_2 = \rho[1(2 \cdot 2) + 3(6 \cdot 6)] = \rho \cdot 112$$

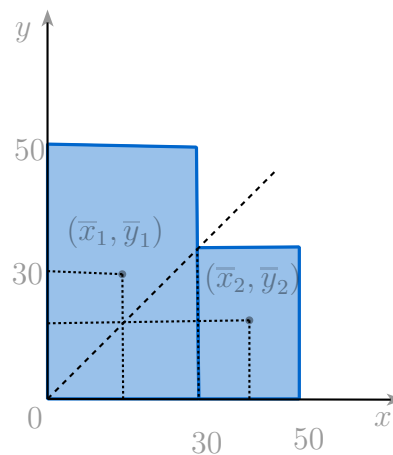
e

$$M_y = \rho \cdot A_1 \cdot \bar{x}_1 + \rho \cdot A_2 \cdot \bar{x}_2 = 1(2 \cdot 2) + 5(6 \cdot 6) = \rho \cdot 184$$

A área total dada por  $A = 2 \cdot 2 + 6 \cdot 6 = 40$ . Assim,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{\rho \cdot A} = \frac{\rho \cdot 184}{\rho \cdot 40} = \frac{23}{5} u.c \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{\rho \cdot A} = \frac{\rho \cdot 112}{\rho \cdot 40} = \frac{14}{5} u.c$$

Exemplo 1.23. Achar o centróide da seção de um pilar indicado na figura a abaixo.



**Solução:** Sabemos que quando a figura possui eixo de simetria, o centróide está sobre esse eixo de simetria. Observe que o eixo de simetria do pilar é a primeira bissetriz. Portanto, nesse caso, em particular,  $\bar{x} = \bar{y} = \frac{M_x}{\rho A}$ , em que  $M_x$  é o somatório dos momentos e  $A$  a área total da superfície. Assim,

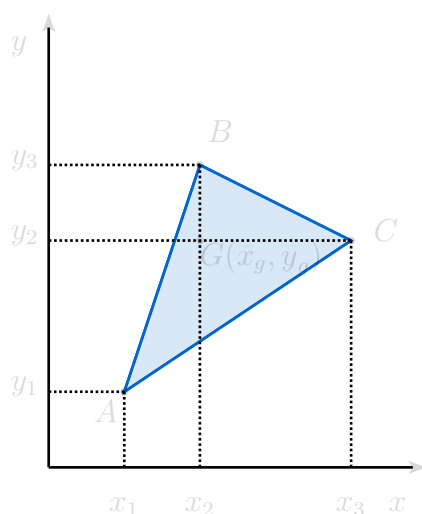
$$M_x = \rho \cdot y_1 A_1 + \rho \cdot y_2 A_2 = \rho \cdot (25 \cdot 30 \cdot 50 + 15 \cdot 20 \cdot 30) = \rho \cdot 46.500 \text{ cm}^3$$

$$A = 30 \cdot 50 + 20 \cdot 30 = 1500 + 600 = 2100 \text{ cm}^2$$

Conseqüentemente,

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\rho \cdot 46.500}{\rho \cdot 2.100} \cong 22 \text{ cm}$$

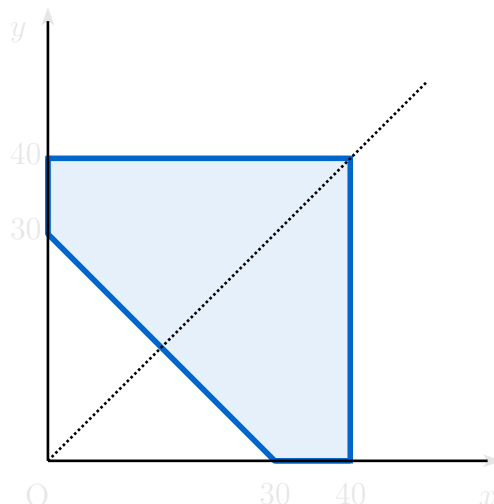
E se quisermos encontrar o centróide de um triângulo qualquer que não seja equilátero? Nesse caso, se a placa é homogênea e de espessura constante, o baricentro coincide com o centróide de sua superfície (veja figura abaixo).



Assim, dadas as coordenadas dos vértices do triângulo podemos determinar o seu baricentro, denotado por  $(\bar{x}_g, \bar{y}_g)$  de forma prática por:

$$\bar{x}_g = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \bar{y}_g = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Exemplo 1.24. Encontre o centróide da superfície composta indicada na figura abaixo.



**Solução:** Observe que nessa figura temos a primeira bissetriz como eixo de simetria, assim  $\bar{x} = \bar{y}$ . Basta, então, encontrarmos  $\bar{y} = \frac{M_x}{A}$ . Observe, também, que o somatório dos momentos  $M_x$  é o momento do quadrado,  $M_x^1$  subtraído do momento do triângulo,  $M_x^2$  e a área total,  $A$ , é a área,  $A_1$  do quadrado menos a área,  $A_2$  do triângulo. Portanto

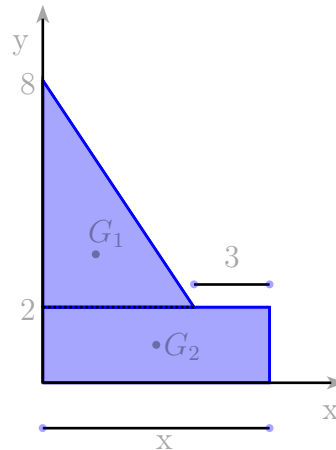
$$A = A_1 + A_2 = 40 \cdot 40 - \frac{30 \cdot 30}{2} = 1.150 \text{ cm}^2$$

$$M_x = M_x^1 - M_x^2 = \rho A_1 \cdot \bar{y}_1 - \rho A_2 \cdot \bar{y}_2 = \rho \left( 40 \cdot 40 \cdot 20 - \frac{30 \cdot 30}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 30 \right) = \rho \cdot 27.500 \text{ cm}^3.$$

Conseqüentemente,

$$\bar{y} = \bar{x} = \rho \frac{M_x}{\rho A} = \frac{27.500}{1.150} = 23,9 \text{ cm}$$

Exemplo 1.25. Na figura abaixo qual deve ser o valor de  $x$  para que a ordenada do centróide seja igual a 2?



**Solução:** Sabemos que a ordenada do centróide é dada por  $\bar{y} = \frac{M_x}{A}$ , em que  $M_x$  denota o momento estático em relação a  $x$  e  $A$  a área total. Vamos denotar por  $M_x^1$  o momento do retângulo em relação ao eixo  $x$  e por  $M_x^2$  o momento do triângulo em relação ao eixo  $x$ , assim como,  $A_1$  e  $A_2$  as áreas do retângulo e do triângulo respectivamente. Assim,

$$A_1 = 2x \text{ e } A_2 = \frac{(x - 3) \cdot 6}{2}.$$

Enquanto que

$$Y_1 = 1 \text{ e } Y_2 = \frac{1}{3} \cdot 6 + 2 = 4.$$

Agora vamos encontrar o momento em relação a  $x$  e a área total.

$$M_x = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 = 2x \cdot 1 + \frac{(x - 3)}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 2x + 12x - 36 = 14x - 36.$$

$$A = 2x + \frac{(x - 3) \cdot 6}{2} = 2x + 3x - 9 = 5x - 9.$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{14x - 36}{5x - 9} = 2. \tag{1.3}$$

Resolvendo a equação 1.9, temos

$$14x - 36 = 10x - 18 \rightarrow 4x = 18 \rightarrow x = 4,5.$$

Como faremos para encontrar centróides de regiões planas que não são formadas por figuras geométricas, as quais já conhecemos o centróide, como mostramos anteriormente?

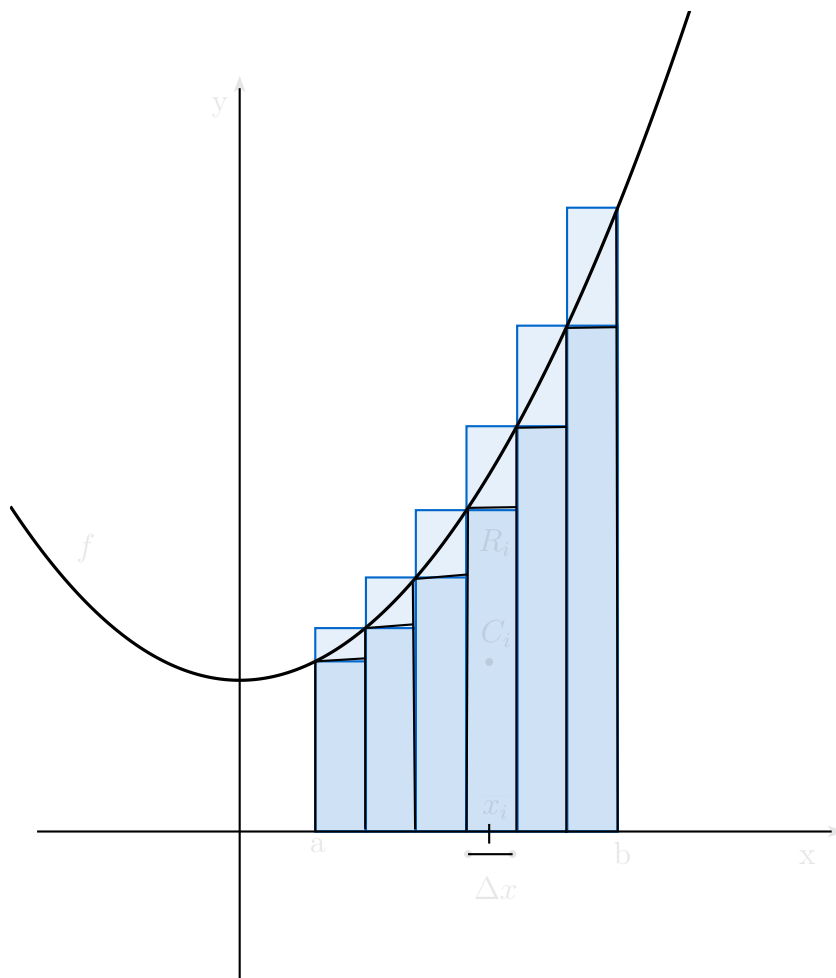


Como por exemplo, o centróide de uma região limitada por uma função qualquer? Para tanto vamos mostrar como obter uma expressão em integral que calcula centróides desse tipo de região.

Seja  $R$  uma região limitada pelas retas  $x = a$ ,  $y = b$ , o eixo  $x$  e a função contínua  $f(x)$  em  $[a, b]$ .

Vamos dividir o intervalo  $[a, b]$ , em sub-intervalos pequenos, tomando-se uma partição

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{(n-1)} < x_n = b.$$



Seja  $\Delta x = x_{i-1} - x_i$  e vamos tomar  $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , tal que

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Assim, podemos dizer que a região é aproximadamente a união dos retângulos de base

$\Delta x_i$  e altura  $f(\bar{x}_i)$ . Vamos denotar por  $C_i = \left(\bar{x}_i, \frac{f(\bar{x}_i)}{2}\right)$  o centróide de cada retângulo  $R_i$ , e por  $A_i = f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$  a área de cada retângulo  $R_i$ . Portanto, a massa é dada por  $m = \rho A_i$ .

O momento de cada retângulo  $R_i$  em relação ao eixo  $y$  é dado por

$$M_y(R_i) = \underbrace{[\rho \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x]}_{\text{massa}} \cdot \underbrace{\bar{x}_i}_{\text{distancia de } R_i \text{ ao eixo } y} = \rho \cdot \bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$$

Para encontrar o momento da região  $R$  em relação ao eixo  $y$ , vamos fazer o máximo dos  $\Delta x_i$  tender a zero. Conseqüentemente temos

$$M_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho \cdot \bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^n \lim_{n \rightarrow \infty} \rho \cdot \bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x := \rho \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

Daí,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b x \cdot f(x) dx}{\rho \cdot A} = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

Similarmente,

$$M_x(R_i) = [\rho \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x] \cdot \frac{f(\bar{x}_i)}{2} = \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot [f(\bar{x}_i)]^2 \cdot \Delta x$$

$$M_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot [f(\bar{x}_i)]^2 \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^n \lim_{n \rightarrow \infty} \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot [f(\bar{x}_i)]^2 \cdot \Delta x := \rho \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx.$$

Conseqüentemente,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\rho \cdot \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx}{\rho \cdot A} = \frac{1}{2A} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx.$$

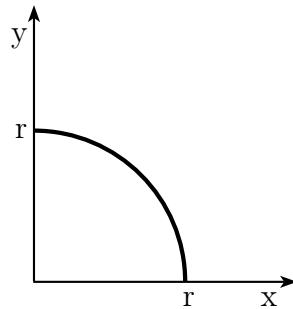
A mesma linha de raciocínio pode ser usada para determinarmos o centróide no caso da região  $R$  ser limitada pelas retas  $y = c$  e  $y = d$  e o eixo  $y$  e a função contínua  $x = f(y)$  em  $[c,d]$ , como mostra a figura abaixo.

Incluir figura 11 Ver com Joseph

Nesse caso, encontramos

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b y \cdot f(y) dy \quad \text{e} \quad \bar{x} = \frac{1}{2A} \int_a^b [f(y)]^2 dy.$$

**Exemplo 1.26.** Encontrar o centróide de  $\frac{1}{4}$  da circunferência de raio  $r$ .



**Solução:** a equação  $x^2 + y^2 = r^2$  representa uma circunferência de raio  $r$ . No primeiro quadrante a quarta parte da circunferência é o gráfico da função  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  e sua área  $A = \frac{\pi r^2}{4}$ . Assim, vamos usar os resultados obtidos anteriormente,

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot f(x) dx \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{2A} \int_a^b [f(y)]^2 dy.$$

Assim,

$$\bar{x} = \frac{4}{\pi r^2} \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx \tag{1.4}$$

Vamos resolver a integral da equação 1.10 por substituição de variável, fazendo  $t = r^2 - x^2 \rightarrow dt = -2x dx$ . Para  $x = 0 \rightarrow t = r^2$  e  $x = r \rightarrow t = 0$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{4}{\pi r^2} \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{4}{\pi r^2} \int_{r^2}^0 \frac{\sqrt{t}}{-2} dt = \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{r^2} \sqrt{t} dt \\ &= \frac{2}{\pi r^2} \cdot \frac{t^{3/2}}{3/2} \Big|_0^{r^2} = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{(r^2)^3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3\pi r^2} \cdot r^3 = \frac{4r}{3\pi}. \end{aligned}$$

Calculando  $\bar{y}$ , temos

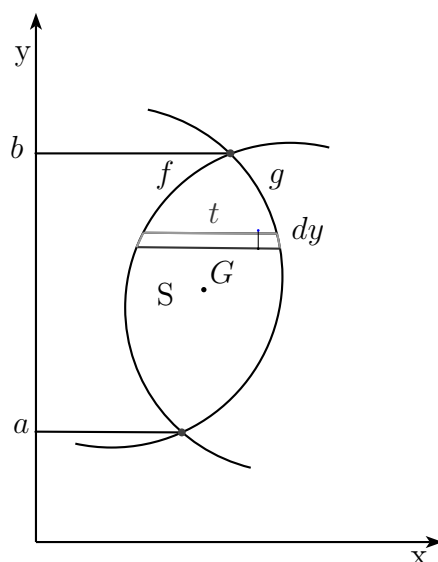
$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{A} \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2} dx = \frac{4}{\pi r^2} \int_0^r \left( \frac{r^2 - x^2}{2} dx \right) = \frac{2}{\pi r^2} \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right] \Bigg|_0^r \\ &= \frac{2}{\pi r^2} \left[ r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{2}{\pi r^2} \left( \frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4r}{3\pi}.\end{aligned}$$

# 1.8 Segundo Teorema de Pappus-Guldin

Agora que você sabe encontrar centróides de regiões planas, já está apto a entender o teorema de Pappus-Guldin, que propicia o cálculo do volume do sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de um eixo de rotação.

**1.4 TEOREMA.** *Se uma região plana gira em torno de uma reta de seu plano que não a intercepta, o volume gerado é igual ao produto da área da região plana pelo comprimento da circunferência percorrida pelo seu centróide.*

**Prova.** Vamos considerar o eixo  $x$  como eixo de rotação e  $\bar{y}$  a ordenada do centróide da região plana e vamos tomar um elemento de área  $dA = t \cdot dy$ , como mostra a figura abaixo.



Assim, queremos mostrar que o volume do sólido gerado  $V$  é o produto da área da região plana pelo comprimento da circunferência percorrida pelo seu centróide, ou seja

$$V = \underbrace{A}_{\text{área}} \cdot \underbrace{2\pi\bar{y}}_{\text{circunferência}} .$$

Utilizando o método da casca cilíndrica, observe que o volume gerado pela rotação da região  $S$  em torno do eixo  $x$  é dado pela expressão

$$V = 2\pi \int_a^b y \cdot t dy. \tag{1.5}$$

Por outro lado, a ordenada do centróide é dada por

$$\bar{y} = \frac{\rho \int_a^b y dA}{\rho \int_a^b dA} = \frac{\int_a^b y dA}{A} \rightarrow \int_a^b y dA = \bar{y}A. \tag{1.6}$$

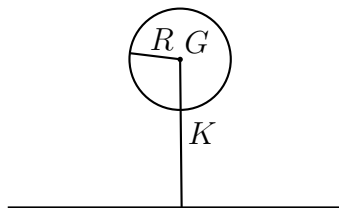
Como  $dA = t \cdot dy$  e com os resultados obtidos na equação 1.6, da equação 1.5 temos

$$V = 2\pi \int_a^b y \cdot t dy = 2\pi \int_a^b y dA = 2\pi \bar{y}A$$

Assim, fica demonstrado Segundo Teorema de Pappus-Guldin.  $\square$

**1.5 Observação.** *Generalizando, o segundo teorema de Pappus-Goldin nos diz que o volume do sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de um eixo é dado por  $V = 2\pi d \cdot A$ , em que  $d$  é a distância do centróide da região ao eixo de rotação e  $A$  é a área da região.*

**Exemplo 1.27.** *Determinar o volume de um toro gerado pela rotação de um círculo de raio  $R$  em torno de um eixo de seu plano à distância  $K > R$  do seu centro ( ver figura abaixo).*



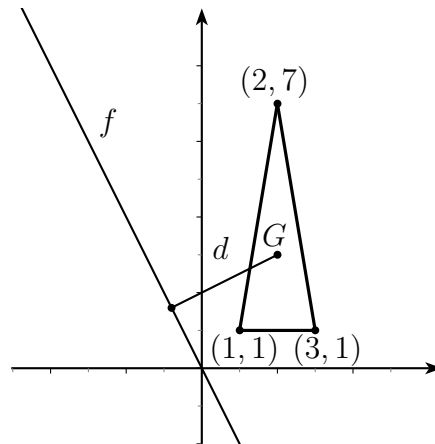
**Solução** Pelo segundo teorema de Pappus-Goldin, o volume é dado por

$$V = A \cdot 2\pi K = \pi R^2 \cdot 2\pi K = 2\pi^2 K R^2.$$

Assim, o volume do toro gerado é  $V = 2\pi^2 K R^2$ .

1.6 Observação. Nesse caso o centróide coincidiu com o centro do círculo cuja ordenada é  $K$ . Ou seja,  $\bar{y} = K$ . Caso a área não seja um círculo temos que encontrar o centróide.

Exemplo 1.28. Encontrar o volume gerado pela rotação do triângulo de vértices  $(1, 1)$ ,  $(3, 1)$  e  $(2, 7)$  em torno da reta  $y = -2x$ , como mostra a figura abaixo.



**Solução** Sabemos, pelo segundo teorema de Pappus-Guldin, que o volume do sólido gerado é dado por  $V = 2\pi d \cdot A$ , em que, nesse caso,  $d$  é a distância do centróide do triângulo à reta  $y = -2x$  e  $A$  é a área do triângulo. Portanto, inicialmente, vamos encontrar o centróide do triângulo. Como visto anteriormente, temos

$$\bar{x}_g = \frac{1 + 3 + 2}{3} = 2 \quad \bar{y}_g = \frac{1 + 1 + 7}{3} = 3.$$

Portanto o centróide do triângulo,  $G$ , é dado por  $G = (2, 3)$ .

Agora, precisamos da distância entre o ponto  $G$  e a reta  $y = -2x$ , e para tanto, vamos nos lembrar como encontrar distância entre ponto e reta.

Dada uma reta  $ax + by + c = 0$ , a distância entre a reta e o ponto  $P(x_0, y_0)$  é dada por

$$d = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

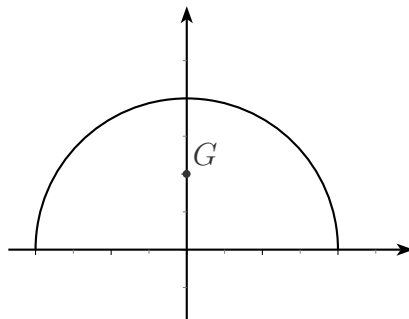
Assim, a distância,  $d$ , entre a reta  $2x + y = 0$  e o ponto  $G(2, 3)$  é dada por

$$d = \frac{2 \cdot (2 + 1) \cdot (3 + 0)}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

Claramente a área,  $A$ , do triângulo é  $A = 6$ , portanto o volume do sólido gerado é

$$V = 2\pi d \cdot A = 2\pi \cdot \frac{7\sqrt{5}}{5} \cdot 6 = \frac{84\pi\sqrt{5}}{5}.$$

**Exemplo 1.29.** Usando o segundo teorema de Pappus-Guldin, determine a ordenada do centróide de semi-círculo de raio  $R$ .



**Solução** Vamos denotar por  $A$  a área do semi-círculo de raio  $R$ , e por  $\bar{y}$  a ordenada do seu centróide. Pelo segundo teorema de Pappus-Guldin, temos

$$V = A \cdot 2\pi\bar{y} = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi\bar{y} = \pi^2 R^2 \bar{y} \quad (1.7)$$

Por outro lado, o volume da esfera é dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (1.8)$$

Igualando as equações 1.7 e 1.8 temos

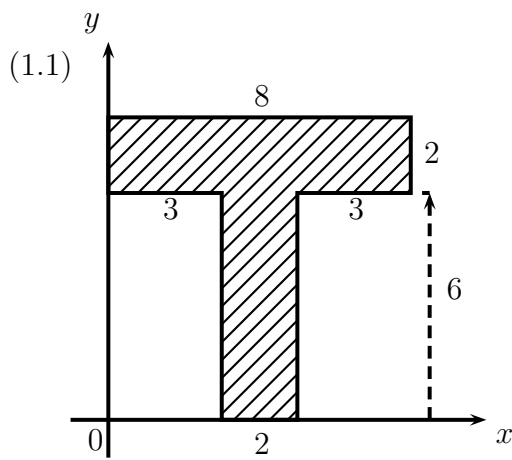
$$\pi^2 R^2 \bar{y} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rightarrow \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Portanto, a ordenada do centróide do semi-círculo de raio  $R$  é  $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$  e observe que a sua abscissa,  $\bar{x}$  é nula, pois está sobre o eixo  $y$ , que é o eixo de simetria.

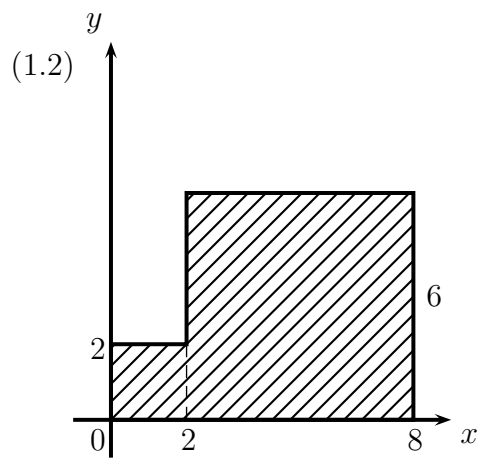


1.9 Exercícios

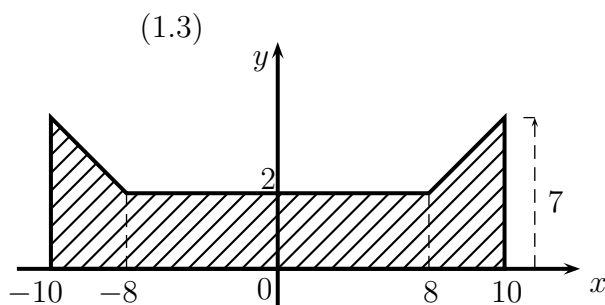
[1] Determine a posição do centróide das seguintes figuras e o volume do sólidos gerados pela rotação das mesmas em torno da reta indicada abaixo de cada figura:



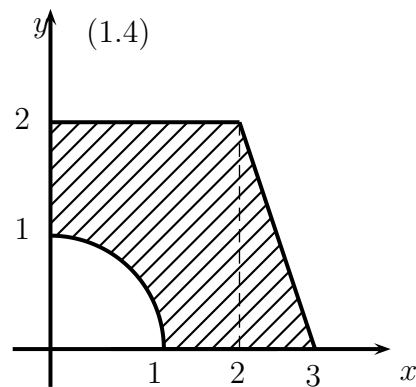
reta:  $y = 10$



reta:  $x - y + 4 = 0$



reta:  $y - 7 = 0$



reta:  $x - 4 = 0$

[2] Determine as coordenadas do centro de gravidade da região plana especificada:

(2.1) Região no primeiro quadrante, delimitada pela elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ )

(2.2) Área delimitada pela curva  $y = 4 - \frac{x^2}{4}$  e o eixo  $x$

(2.3) Área delimitada pela parábola  $y^2 = ax$  e pela reta  $x = a$ .

---

[3] Seja  $R$  a região do plano limitado pelas curvas  $y = x^2$  e  $y = -x^2 + 2$ .

(3.1) Esboce  $R$  e calcule a sua área.

(3.2) Calcule o centróide de  $R$ .

(3.3) A região  $R$  é girado em torno da reta  $x = 2$  formando um sólido  $D$ . Calcule o volume de  $D$ , usando o teorema de Pappus-Guldin.

[4] Seja  $R$  a região do plano limitado pelas curvas  $y = -x^2 - 3x + 6$  e  $x + y - 3 = 0$ .

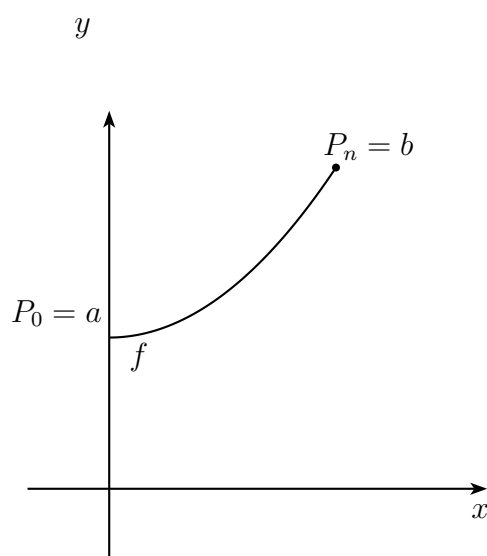
(4.1) Esboce  $R$  e calcule a sua área.

(4.2) Calcule o centróide de  $R$ .

(4.3) A região  $R$  é girado em torno da reta  $x + y - 3 = 0$  formando um sólido  $D$ . Calcule o volume de  $D$ , usando o teorema de Pappus-Guldin.

## 1.10 Comprimento de Arco de uma Curva

Em muitas situações vamos precisar do comprimento da trajetória percorrida por uma partícula, como por exemplo o comprimento de uma rodovia, constituída de muitas curvas sinuosas. Nesses casos, se faz necessário o cálculo do comprimento do arco de uma dada curva. O nosso objetivo agora é poder expressar esse comprimento através de uma integral definida. Para tanto, vamos considerar uma função contínua  $f$  com primeira derivada também contínua, definida num intervalo fechado  $[a, b]$ . Nessas condições, vamos considerar que o gráfico dessa função é uma curva lisa e sem repetições de trechos como mostrar a figura a seguir.



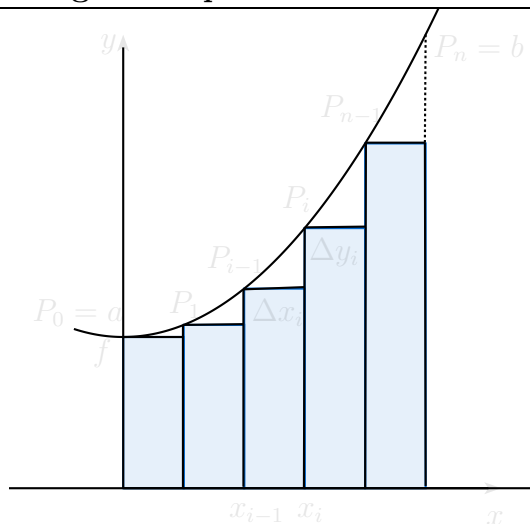
Vamos dividir o intervalo  $[a, b]$ , em sub-intervalos pequenos, tomando-se uma partição

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{(n-1)} < x_n = b$$

Observe que ao fazermos isso estamos dividindo a curva nos pontos

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n,$$

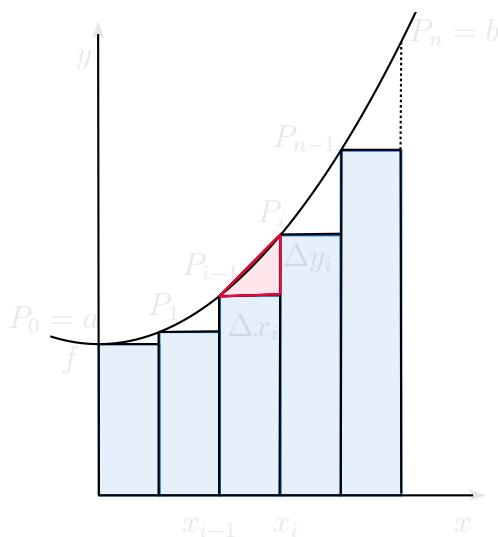
tais que  $P_0(a, y_0)$  e  $P_n(b, y_n)$ , como mostra a figura seguinte.



Assim, fazendo um cálculo grosseiro podemos dizer que o comprimento da curva, denotado por  $L$ , é aproximadamente igual a soma dos comprimentos dos segmentos  $P_{i-1}P_i$  com  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ou seja,

$$L \cong \sum_{i=1}^n \overline{P_{(i-1)}P_i} = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \dots + \overline{P_{(n-1)}P_n}$$

Considerando  $\Delta x_i = x_i - x_{(i-1)}$  e  $\Delta y_i = y_i - y_{(i-1)}$ , vamos denotar por  $\Delta l_i$  o comprimento de cada segmento  $P_{(i-1)}P_i$ , em que  $i = 1, 2, \dots, n$ , isto é,  $\Delta l_i = \overline{P_{(i-1)}P_i}$ .



Na figura anterior, observe o triângulo retângulo, e por Pitágoras temos:

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{\frac{(\Delta x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} ((\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2)} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} |\Delta x_i|.$$

Observe que  $\Delta x_i$  é um valor positivo, devido a forma que tomamos a partição. Conseqüentemente, o comprimento total da curva( $L$ ) é aproximadamente igual à

$$L \cong \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

Fazendo o máximo dos  $\Delta x_i$  tender a zero, diminuimos o erro nos cálculos e refinamos a partição, pois  $n \rightarrow \infty$ . Assim, passando o limite, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

Agora, como  $f$  é derivável e contínua em  $[a, b]$ , o **Teorema do Valor Médio** garante que existe  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tal que  $\Delta y_i = f'(c_i)\Delta x_i$ .

Dessa forma podemos definir o comprimento da curva como

$$L = \sum_{i=1}^n \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i := \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Portanto concluímos que se  $f = f(x)$  é uma função contínua e derivável para todo  $x$  pertencente ao intervalo fechado  $[a, b]$  o comprimento da curva lisa do gráfico de  $f$  é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Analogamente, se  $g = g(y)$  é uma função contínua e derivável em  $[c, d]$ , temos

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy.$$

Agora usando o resultado obtido podemos resolver os seguintes exemplos:

Exemplo 1.30. Calcule o comprimento de arco da curva de equação

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{para} \quad x \in [-1, 1].$$

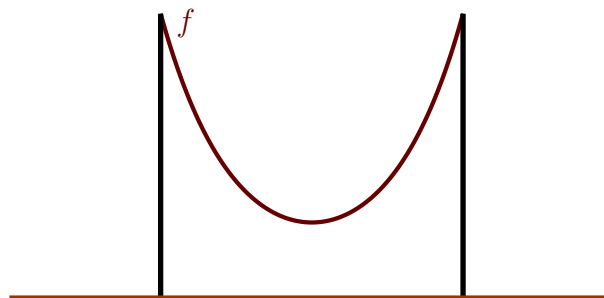
**Solução:** A derivada da função  $y = f(x)$  é  $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , assim

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{4 + (e^x)^2 - 2 + (e^{-x})^2}{4}} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{(e^x)^2 + 2 + (e^{-x})^2}{4}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}} dx = \int_{-1}^1 \left| \frac{e^x + e^{-x}}{4} \right| dx \end{aligned}$$

Como  $e^x + e^{-x} > 0$  para todo  $x$ ,

$$L = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) dx = \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left( 2e - 2 \cdot \frac{1}{e} \right) = e - \frac{1}{e} \quad \text{u.c.}$$

Uma curiosidade é que as funções  $y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  e  $y(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , são o cosseno hiperbólico e o seno hiperbólico, respectivamente. O gráfico da função cosseno hiperbólico (ver figura abaixo) é uma "catenária" e tem a forma de um fio flexível preso pelas pontas e deixado sob ação da gravidade.

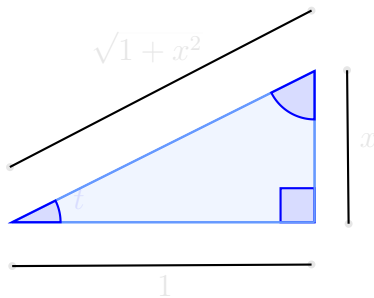


Exemplo 1.31. Calcule o comprimento do arco da parábola  $y = \frac{x^2}{2}$  para  $x \in [0, 1]$ .

**Solução**

Como  $f(x) = \frac{x^2}{2}$  e  $f'(x) = x$  o comprimento do arco da parábola dado por

$L = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$  é igual a  $L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$ . Usando substituição trigonométrica, fazendo  $y = tg(t)$  e observando o triângulo abaixo, temos



$$\cos(t) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos(t)} = \sec(t)$$

$$\text{sen}(t) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$tg(t) = \frac{x}{1} \rightarrow dx = \sec^2(t) dt$$

$$x = 0 \rightarrow t = \text{arctg}(0) = 0 \text{ e } y = 1 \rightarrow t = \text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Logo, o comprimento de arco da parábola é

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{(1+x^2)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+tg^2(t)} \cdot \sec^2(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3(t) dt \stackrel{*}{=} \frac{\sec(t) \cdot tg(t) + \ln |\sec(t) + tg(t)|}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot tg\left(\frac{\pi}{4}\right) + \ln \left| \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) + tg\left(\frac{\pi}{4}\right) \right|}{2} - \frac{\sec(0) \cdot tg(0) + \ln |\sec(0) + tg(0)|}{2} \\ &= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot (1) + \ln \left| \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \right|}{2} = \frac{\sqrt{2} + \ln |\sqrt{2} + 1|}{2} \text{ u.c.} \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar como obtivemos o resultado da integral da função  $\int \sec^3(t)$ , sinalizada anteriormente.

$$* \int \sec^3(t) dt = \int \sec^2(t) \sec(t) dt$$

Vamos resolver a integral pelo método de integração por partes, fazendo

$$u = \sec(t) \rightarrow du = \sec(t) \operatorname{tg}(t) dt \quad \text{e} \quad dv = \sec^2(t) dt \rightarrow v = \operatorname{tg}(t).$$

Aplicando o método de integração por parte, em que  $\int u dv = uv - \int v du$ , temos

$$\begin{aligned} \int \sec^3(t) dt &= \sec(t) \cdot \operatorname{tg}(t) - \int \operatorname{tg}^2(t) \sec(t) dt \\ &= \sec(t) \cdot \operatorname{tg}(t) - \int (\sec^2(t) - 1) \sec(t) dt \\ &= \sec(t) \cdot \operatorname{tg}(t) - \int \sec^3(t) dt + \int \sec(t) dt \end{aligned}$$

Observe que do outro lado da última igualdade encontramos novamente a integral  $\int \sec^3(t) dt$ . Resolvendo a igualdade e usando o resultado

$$\int \sec(t) dt = \ln |\sec(t) + \operatorname{tg}(t)| + C,$$

C uma constante, temos

$$2 \int \sec^3(t) dt = \sec(t) \cdot \operatorname{tg}(t) + \ln |\sec(t) + \operatorname{tg}(t)| + C$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int \sec^3(t) dt &= \frac{\sec(t) \cdot \operatorname{tg}(t) + \ln |\sec(t) + \operatorname{tg}(t)|}{2} + C \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} \cdot x + \ln |\sqrt{1+x^2} + x|}{2} + C \end{aligned}$$



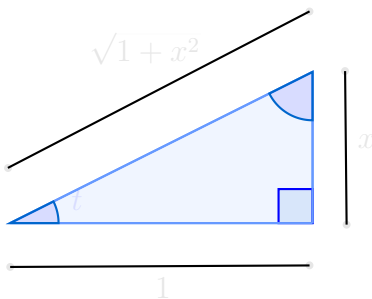
Exemplo 1.32. Calcule o comprimento do arco da curva

$$y = \ln(x), \quad \text{em que } \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

**Solução:** A derivada da função  $y = \ln(x)$  é igual  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ , assim o comprimento do arco é dado por

$$\begin{aligned} L &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x|} dx \end{aligned}$$

A última integral deve ser resolvida pelo método de substituição trigonométrica. Fazendo  $x = tg(t)$  e observando o triângulo abaixo temos



$$\cos(t) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos(t)} = \sec(t)$$

$$\sen(t) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$tg(t) = \frac{x}{1} \rightarrow dx = \sec^2(t)dt$$

Muitas vezes, principalmente quando vamos fazer muitas substituições de variáveis, trocar os limites da integral definida fica complicado, assim podemos colocar o resultado final em função de  $x$  e utilizar os limites dados no início. Considerando que  $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$ , e fazendo a substituição de variável para  $t$ , temos

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} &= \int \frac{\sqrt{tg^2(t) + 1}}{tg(t)} \sec^2(t) dt = \int \frac{\sec(t) \cdot \sec^2(t)}{tg(t)} dt \\ &= \int \frac{\sec^3(t)}{tg(t)} dt = \int \frac{1}{\cos^3(t)} \cdot \frac{\cos(t)}{\sen(t)} dt = \int \frac{1}{\cos^2(t) \cdot \sen(t)} dt \\ &= \int \frac{1}{\cos^2(t) \cdot \sen(t)} \cdot \frac{\sen(t)}{\sen(t)} dt = \int \frac{\sen(t)}{\cos^2(t) \cdot \sen^2(t)} dt \\ &= \int \frac{\sen(t)}{\cos^2(t) \cdot (1 - \cos^2(t))} dt \end{aligned}$$

Agora vamos fazer uma substituição de variáveis, fazendo

$$u = \cos(t) \rightarrow du = -\operatorname{sen}(t)dt$$

Dando continuidade,

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos^2(t) \cdot (1 - \cos^2(t))} dt &= \int \frac{-1}{u^2(1 - u^2)} du = \int \frac{-1}{u^2(1 - u)(1 + u)} du \\ &= \int \left( \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{1 - u} + \frac{D}{1 + u} \right) du\end{aligned}$$

No método de decomposição em frações parciais, temos que encontrar as constantes  $A, B, C$  e  $D$ . Para tanto, vamos encontrar o m.m.c. da equação seguinte:

$$\frac{-1}{u^2(1 - u)(1 + u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{1 - u} + \frac{D}{1 + u}$$

$$-1 = Au(1 - u^2) + B(1 - u^2) + Cu^2(1 + u) + Du^2(1 - u)$$

Poderíamos resolver por igualdade de polinômios, mas um método fácil é associarmos valores a  $u$ , assim

$$u = 0 \rightarrow B = -1$$

$$u = 1 \rightarrow C = \frac{-1}{2}$$

$$u = -1 \rightarrow D = \frac{-1}{2}$$

$$u = 2 \rightarrow -1 = -6A - 3B + 12C - 4D \rightarrow A = 0$$

Portanto, temos

$$\int \left( \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{1-u} + \frac{D}{1+u} \right) du = \int \left( \frac{0}{u} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{2(1-u)} - \frac{1}{2(1+u)} \right) du$$

$$= \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \ln|u-1| - \frac{1}{2} \ln|1+u| + C = \frac{1}{\cos(t)} + \frac{1}{2} \ln|\cos(t)-1| - \frac{1}{2} \ln|1+\cos(t)| + C$$

Usando a relação obtida anteriormente em que  $\cos(t) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , podemos obter o resultado em função da variável  $x$ , e enfim aplicar os limites de integração.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right| - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right| \Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}$$

$$= \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right| - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right| \Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}$$

$$= \sqrt{1+(\sqrt{8})^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{8})^2}} - 1 \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{8})^2}} \right| -$$

$$- \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}} - 1 \right| + \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}} \right|$$

$$= 3 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{3} - 1 \right| - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{1}{3} \right| - 2 - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2} - 1 \right| + \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{1}{2} \right|$$

$$= 3 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{3} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{4}{3} \right| - 2 - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3}{2} \right|$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \text{ u.c.}$$

---

**1.11 Exercícios**

[1] Determinar o comprimento das curvas dadas em coordenadas retangulares:

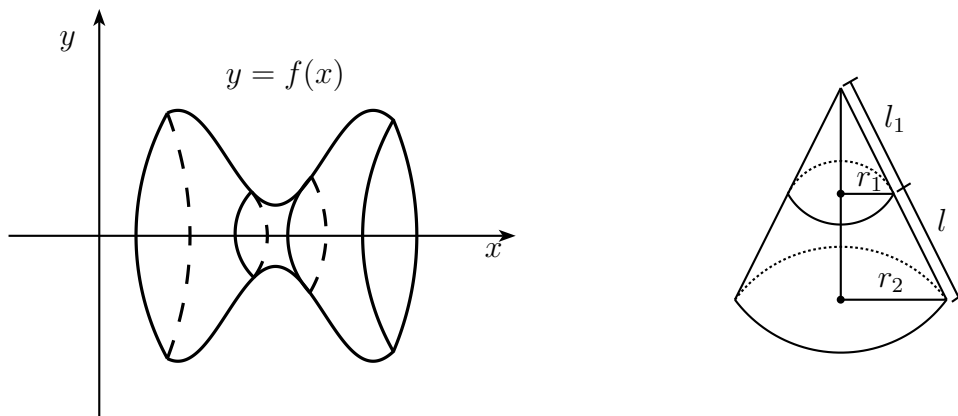
$$(1.1) y = \ln(1 - x^2) \text{ de } x = \frac{1}{4} \text{ a } x = \frac{3}{4}. \quad (1.2) y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2} \text{ de } x = 1 \text{ a } x = 2.$$

$$(1.3) y = 1 - \ln(\operatorname{sen} x) \text{ de } x = \frac{\pi}{6} \text{ a } x = \frac{\pi}{4}. \quad (1.4) (y - 1)^2 = (x + 1)^3 \text{ de } x = 0 \text{ a } x = 1.$$

$$(1.5) y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \text{ de } x = 0 \text{ a } x = 1. \quad (1.6) x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4y} \text{ de } y = 1 \text{ a } y = 3.$$

### 1.12 Área de superfícies de revolução

Vamos supor que temos uma curva  $y = f(x)$  definida num intervalo  $[a, b]$ , em que  $f$  é uma função positiva e possui derivadas contínuas, ver a figura abaixo. Ao rotacionarmos essa curva em torno do eixo  $OX$  um sólido é gerado. Queremos encontrar uma integral que represente a área da superfície desse sólido. Para tanto, inicialmente devemos fazer um cálculo aproximado. Uma idéia é dividirmos esse sólido em pedaços e aproximar cada pedaço de um tronco de cone. Ao somar a área de superfície de cada tronco de cone obtemos um cálculo aproximado e ao tomarmos o limite o cálculo obtido é a área exata da superfície do sólido de revolução.



Inicialmente vamos deduzir uma fórmula para encontrar a área de superfície do tronco de um cone.

Observe o cone planificado ao lado. Através da regra de três abaixo deduzimos a área do setor circular, que representa a área lateral do cone de geratriz  $(l_1 + l)$ . O comprimento da circunferência de raio  $(l_1 + l)$  está para a área do círculo com mesmo raio, assim como o comprimento do setor circular de ângulo  $\alpha$  está para a sua área.

$$2\pi (l_1 + l) \longrightarrow \pi (l_1 + l)^2$$

$$2\pi r_2 \longrightarrow A_M$$

$$A_M = \frac{2\pi r_2 \cdot \pi (l_1 + l)^2}{2\pi (l_1 + l)} = \pi l_1 r_2.$$

The diagram shows a circular sector. The radius of the sector is labeled  $(l_1 + l)$ . The arc length of the sector is labeled  $2\pi r_2$ . The central angle of the sector is labeled  $\alpha$ .

Similarmente, obtermos que a área lateral do cone menor é dada por:  $A_m = \pi r_1 l_1$ .

A área da superfície de um tronco de cone é dada pela área da superfície do cone maior menos a do cone menor. Portanto

$$A = A_m - A_m = \pi r_2(l_1 + l) - \pi r_1 l_1 = \pi[(r_2 - r_1)l_1 + r_2 l]. \tag{1.9}$$

Agora, por semelhança de triângulos temos

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_1 + l}{r_2} \rightarrow r_2 l_1 = r_1 l_1 + r_1 l \rightarrow (r_2 - r_1)l_1 = r_1 l$$

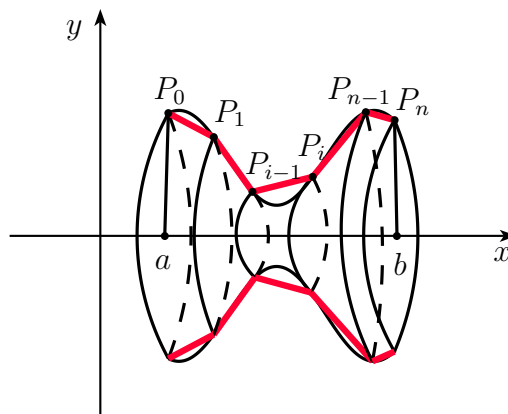
Substituindo o resultado obtido na equação 1.9 temos

$$A = \pi(r_1 l + r_2 l) = 2\pi r l \tag{1.10}$$

em que  $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$  é o raio médio da faixa.

Agora vamos deduzir a integral que representa a área da superfície do sólido de revolução.

Vamos dividir o intervalo  $[a, b]$ , em sub-intervalos pequenos, tomando-se uma partição  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{(n-1)} < x_n = b$ , cujos intervalos são iguais.



Observe que ao fazermos isso estamos dividindo a curva nos pontos  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ , tais que  $P_0(a, y_0)$  e  $P_n(b, y_n)$ , como mostra a figura anterior. Podemos aproximar o trecho da curva entre  $x_i$  e  $x_{i-1}$ , por um segmento de reta que liga  $P_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$  a  $P_i(x_i, y_i)$ . Ao girar o segmento de reta  $P_{i-1}P_i$  em torno do eixo  $OX$ , obtermos um tronco de pirâmide,

cuja geratriz é  $l = |P_{i-1}P_i|$  e raio médio igual a  $r = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$ . Consequentemente, a área da superfície do tronco desse cone é dada por

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i|.$$

Como  $f$  é contínua, quando  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$  é suficientemente pequeno e considerando  $\xi_i$  pertencente ao intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , podemos obter uma melhor aproximação, pois  $y_i = f(x_i) \cong f(\xi_i)$ , assim como também  $y_{i-1} = f(x_{i-1}) \cong f(\xi_i)$ . Ainda com intuito de melhorar a aproximação, podemos tomar o comprimento do segmento  $|P_{i-1}P_i|$  como o comprimento do arco que liga  $P_{i-1}$  a  $P_i$ , ou seja, em vez de  $|P_{i-1}P_i|$  podemos escrever  $\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x$

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i| \cong 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x.$$

Consequentemente, a área total da superfície do sólido é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x.$$

Agora refinando a partição, fazendo  $n \rightarrow \infty$  e passando o limite,

$$\lim_{i=1}^n \sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x := \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Logo, para uma função  $f$  positiva e com derivada contínua encontramos que a área de superfície do sólido gerado pela rotação da curva  $y = f(x)$  em torno do eixo  $OX$  é dada por

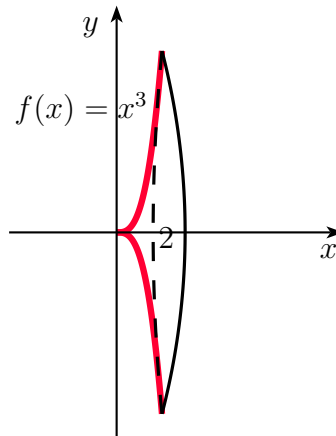
$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Observe que o termo  $2\pi f(x)$  representa o comprimento da circunferência descrita por um ponto  $(x, y)$  pertencente a curva ao ser girado em torno do eixo  $OX$  e o termo  $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$  representa o comprimento da curva.

Similarmente, se temos uma curva dada pela função  $x = g(y)$ ,  $y \in [c, d]$ , então a área da superfície do sólido gerado pela rotação da curva a em torno do eixo  $y$  é dada por

$$A = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy.$$

**Exemplo 1.33.** Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva  $y = x^3$  ao redor do eixo  $OX$ , em que  $x$  varia entre 0 e 2.



**Solução:** Nesse caso, vamos usar a fórmula  $A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ , pois o raio da circunferência descrita por um ponto pertencente a curva  $y = x^3$ , quando essa gira em torno do eixo  $OX$  é  $y = f(x)$ . Vamos encontrar a área da superfície do sólido obtido pela rotação da curva  $y = x^3$ ,  $0 \leq x \leq 2$  ao redor do eixo  $OX$ . Para tanto devemos resolver a integral abaixo.

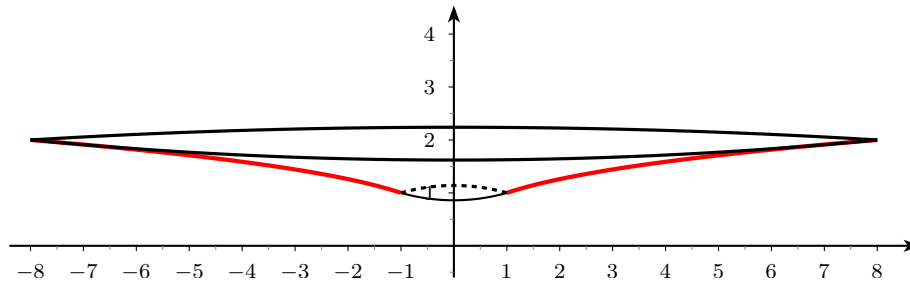
$$A = \int_0^2 2\pi x^3 \sqrt{1 + [3x^2]^2} dx = \int_0^2 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx$$

Vamos utilizar o método de substituição de variáveis. Fazendo  $t = 1 + 9x^4$ , temos que  $dt = 36x^3 dx$  e para  $x = 0 \rightarrow t = 1$  e  $x = 2 \rightarrow t = 145$ . Substituindo temos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \frac{\pi}{18} \int_1^{145} \sqrt{t} dt \\ &= \frac{\pi}{18} \frac{t^{3/2}}{3/2} \Big|_1^{145} = \frac{\pi}{27} (145\sqrt{145} - 1) \text{ u.a.} \end{aligned}$$



Exemplo 1.34. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva  $y = x^{1/3}$  ao redor do eixo  $OY$ , em que  $y$  varia entre 1 e 2.



**Solução:** Observe que nesse caso a curva está em função da variável  $x$  e é rotacionada em torno do eixo  $y$ . Assim, o raio da circunferência ao rotacionarmos um ponto pertencente a curva em torno do eixo  $y$  é dado por um valor  $x = y^3$ . Então vamos usar a fórmula

$$A = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left[\frac{dx}{dy}\right]^2} dy \quad \text{com } c \leq y \leq d.$$

Assim, temos que resolver a integral

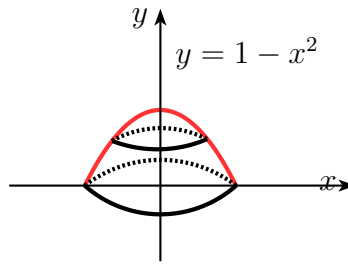
$$A = \int_1^2 2\pi y^3 \sqrt{1 + [3y^2]^2} dy = \int_1^2 2\pi y^3 \sqrt{1 + 9y^4} dy.$$

Vamos utilizar o método de substituição de variáveis. Fazendo  $t = 1 + 9y^4$ , temos que  $dt = 36y^3 dy$  e para  $y = 1 \rightarrow t = 10$  e  $y = 2 \rightarrow t = 145$ . Substituindo temos

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 2\pi y^3 \sqrt{1 + [3y^2]^2} dy = \frac{2\pi}{36} \int_{10}^{145} \sqrt{t} dt \\ &= \frac{\pi}{27} \frac{t^{3/2}}{3/2} \Big|_{10}^{145} = \frac{2\pi}{81} \left( 145\sqrt{145} - 10\sqrt{10} \right) u.a. \end{aligned}$$

Exemplo 1.35. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva  $y = 1 - x^2$  ao redor do eixo  $OY$ , em que  $x$  varia entre 0 e 1.



**Solução:** Observe que nesse caso a curva está em função da variável  $x$  e é rotacionada em torno do eixo  $y$ . Assim, o raio da circunferência ao rotacionarmos um ponto pertencente a curva em torno do eixo  $y$  é dado por um valor  $x$ . Dessa forma podemos integrar em relação a  $x$ . Então vamos usar a fórmula

$$A = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2} dx \quad \text{com } a \leq x \leq b.$$

Assim, temos que resolver a integral

$$A = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + [-2x]^2} dx = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

Vamos utilizar o método de substituição de variáveis. Fazendo  $t = 1 + 4x^2$ , temos que  $dt = 8xdx$  e para  $x = 0 \rightarrow t = 1$  e  $x = 1 \rightarrow t = 5$ . Substituindo temos

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{2\pi}{8} \int_1^5 \sqrt{t} dt \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{t^{3/2}}{3/2} \Big|_1^5 = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1) \text{ u.a.} \end{aligned}$$

---

**1.13 Exercícios**

Calcular a área da superfície gerada pela rotação do arco de curva dado, em torno do eixo indicado:

1)  $y^2 = 4ax$ ,  $0 \leq x \leq 3a$ ; eixo dos  $x$

2)  $y = 2x$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ; eixo dos  $x$

3)  $y = 2x$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ; eixo dos  $y$

4)  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ; eixo dos  $x$

5)  $x = \sqrt{y}$ ,  $1 \leq y \leq 4$ ; eixo dos  $y$

6)  $y = \sqrt{16 - x^2}$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ ; eixo dos  $x$

1.14 Respostas dos Exercícios Propostos

• Área de Regiões Planares (página 06)

$$[1] \left\{ \begin{array}{lll} (1.1) [2 \ln 2 - 1] \text{u.a} & (1.2) \frac{46}{3} \text{u.a} & (1.3) \left[ \frac{15}{2} - 8 \ln 2 \right] \text{u.a} \\ (1.4) \left[ \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3} \right] \text{u.a} & (1.5) \left[ \frac{-3}{4} + 2 \ln 2 \right] \text{u.a} & (1.6) \left[ \frac{16\sqrt{2} + 24\sqrt{6} - 64}{3} \right] \text{u.a} \\ (1.7) \frac{71}{6} \text{u.a} & (1.8) 18 \ln 3 \text{ u.a} & (1.9) \frac{1}{6} \text{u.a} \\ (1.10) \frac{64}{3} \text{u.a} & & \end{array} \right.$$

• Volume de Sólidos (página 21)

$$[3] V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2) \text{ u.v} \quad [4] V = \frac{4\sqrt{3}r^3}{3} \text{ u.v} \quad [5] V = \frac{8r^3}{3} \text{ u.v}$$

$$[6] V = \frac{4r^3}{3} \text{ u.v} \quad [7] V = \frac{4\pi r^3}{3} \text{ u.v} \quad [8] V = \frac{2\pi r^3}{3\sqrt{1-e^2}} \text{ u.v}$$

$$[9] V = \frac{2\pi a^2 b}{3} \text{ u.v} \quad [10] V = \frac{2\pi ab^2}{3} \text{ u.v} \quad [11] V = 6 \text{ u.v}$$

• Volume de sólidos de revolução (página 32)

$$[1] V = \frac{\pi(e^4 + 4e^2 - 1)}{4e^2} \text{ u.v}$$

$$[2] \left\{ \begin{array}{ll} (2.1) V = 4\pi \text{ u.v} & (2.2) V = 12\pi \text{ u.v} \end{array} \right.$$

$$[3] \left\{ \begin{array}{lll} (3.1) V = \frac{24\pi}{5} \text{ u.v} & (3.2) V = \frac{96\pi}{5} \text{ u.v} & (3.3) V = \frac{272\pi}{15} \text{ u.v} \\ (3.4) V = \frac{27\pi}{2} \text{ u.v} & (3.5) V = \frac{\pi^2}{2} \text{ u.v} & \end{array} \right.$$

• Centróides e 2º Teorema de Pappus (página 50)

$$[1] \left\{ \begin{array}{ll} (1.1) \left( 4, \frac{37}{7} \right); V = 264\pi u.v & (1.2) \left( \frac{23}{5}, \frac{14}{5} \right); V = 232\sqrt{2}\pi u.v \\ (1.3) \left( 0, \frac{23}{15} \right); V = 80\pi u.v & (1.4) \left( \frac{44}{28-\pi}, \frac{76}{84-3\pi} \right); V = 2\pi(17-\pi)u.v \end{array} \right.$$

$$[2] \left\{ \begin{array}{lll} (2.1) \left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right) & (2.2) \left(0, \frac{8}{5}\right) & (2.3) \left(\frac{3a}{5}, 0\right) \end{array} \right.$$

$$[3] \left\{ \begin{array}{lll} (3.1) A = \frac{8}{3} \text{ u.a} & (3.2) (\bar{x}, \bar{y}) = (0, 1) & (3.3) V = \frac{32\pi}{3} \text{ u.v} \end{array} \right.$$

$$[4] \left\{ \begin{array}{lll} (4.1) A = \frac{32}{3} \text{ u.a} & (4.2) (\bar{x}, \bar{y}) = \left(-1, \frac{25}{8}\right) & (4.3) V = \frac{256\sqrt{2}\pi}{15} \text{ u.v} \end{array} \right.$$

• Comprimento de arco de uma curva (página 61)

$$[1] \left\{ \begin{array}{lll} (1.1) \ln\left(\frac{21}{5}\right) - \frac{1}{2} \text{ u.c} & (1.2) \frac{123}{32} \text{ u.c} & (1.3) \ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right| \text{ u.c} \\ (1.4) \frac{1}{27}(22\sqrt{22} - 13\sqrt{13}) \text{ u.c} & (1.5) \frac{1}{2e}(e^2 - 1) \text{ u.c} & (1.6) \frac{53}{6} \text{ u.c} \end{array} \right.$$

• Área de uma superfície de revolução (página 68)

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{56}{3}\pi a^2 & 2) 8\pi\sqrt{5} & 3) 4\pi\sqrt{5} \\ 4) 4\pi[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)] & 5) \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) & 6) 48\pi \end{array}$$